

SOMMARIO: 1. Leggi finanziarie. - 2. Regime finanziario dell'interesse semplice e dello sconto razionale. - 3. Regime finanziario dell'interesse e dello sconto composto. - 4. Tassi equivalenti. - 5. Tassi nominali e tassi istantanei. - 6. Convenzione lineare e convenzione esponenziale. - 7. Regime finanziario dello sconto commerciale. - 8. Confronto tra i regimi finanziari. - 9. Forza d'interesse. - 10. Scindibilità delle leggi finanziarie. - 11. Principio dell'equivalenza finanziaria. - 12. Scadenza media e tasso medio. - Questionario.

1. LEGGI FINANZIARIE

La matematica finanziaria ha per oggetto di studio le **operazioni finanziarie**, cioè le *operazioni di scambio di moneta contro moneta* in tempi diversi.

Il suo scopo principale è trasferire valori monetari nel tempo consentendo la loro comparabilità, prescindendo da qualsiasi considerazione circa il potere di acquisto di tali valori che varia nel tempo a causa di situazioni d'inflazione o di deflazione.

Le operazioni finanziarie sono:

- operazioni di **capitalizzazione** se i valori monetari sono trasferiti avanti nel tempo;
- operazioni di **attualizzazione** se i valori monetari sono trasferiti indietro nel tempo.

Gli elementi fondamentali di una operazione finanziaria sono: **importi** e **scadenze**.

Sulla base di questi due elementi si effettua una prima distinzione tra:

- **operazioni finanziarie certe** che sono quelle i cui *importi* si rendono disponibili a determinate *scadenze con certezza*;
- **operazioni finanziarie aleatorie** che sono quelle i cui *importi* si rendono disponibili solo se si verificano degli *eventi aleatori*.

Per introdurre la terminologia usata, si consideri una operazione finanziaria semplice consistente nello scambio, tra due individui, *A* e *B*, di due capitali, rispettivamente *C* e *M* (con $M > C$), in due successivi istanti di tempo, *x* e *y*:



Se l'operazione di scambio dell'importo *C* all'istante *x* contro l'importo *M* all'istante successivo *y*, è accettata dai due individui, si dice che *C* e *M* sono **finanziariamente equivalenti** tra loro per il *principio dell'equivalenza finanziaria* che approfondiremo nel corso di questo e dei successivi capitoli.

Avendo supposto $x < y$, si ha che:

- A è detto *creditore* o *mutuante*;
- B è detto *debitore* o *mutuatario*;
- C è il *capitale impiegato*, anticipato o investito;
- M è il *capitale dovuto* alla scadenza;
- x è la *data di investimento*;
- y è la *scadenza*;
- $[x, y]$ è il *periodo di impiego*.

Se nell'operazione finanziaria l'elemento fondamentale è il capitale C impiegato, allora M si dice **montante**, al tempo y , del capitale C impiegato al tempo x . Si dice **interesse** prodotto dal capitale C nel periodo $[x, y]$ la quantità:

$$I = M - C \quad (1.1)$$

da cui:

$$M = C + I \quad (1.2)$$

Se nell'operazione finanziaria, invece, l'elemento fondamentale è il capitale M dovuto alla scadenza, allora C si dice **valore attuale** al tempo x del capitale M dovuto al tempo y . Si dice **sconto** sul capitale M per l'anticipo dal tempo y al tempo x , la quantità:

$$D = M - C \quad (1.3)$$

da cui:

$$C = M - D \quad (1.4)$$

Dalle relazioni (1.1) e (1.3) si evince che $I = D$.

Per generalizzare i calcoli si assume $C = 1$, e si usano le seguenti notazioni:

- i è il **tasso effettivo d'interesse** prodotto da un capitale unitario, relativo al periodo considerato:

$$i = \frac{I}{C} \quad (1.5)$$

- r è il **montante di un capitale unitario**, al termine del periodo considerato:

$$r = \frac{M}{C} \quad (1.6)$$

che, date le relazioni (1.2) e (1.5), è uguale a:

$$r = \frac{M}{C} = \frac{C + I}{C} = \frac{C + Ci}{C} = 1 + i \quad (1.7)$$

ed è detto **fattore di montante** o **fattore di capitalizzazione**;

- d è il **tasso effettivo di sconto** relativo al periodo considerato, ossia lo sconto su ogni unità di capitale dovuta alla scadenza:

$$d = \frac{D}{M} \quad (1.8)$$

— v è il **valore attuale**, all'inizio del periodo per ogni unità di capitale dovuta al termine del periodo:

$$v = \frac{C}{M} \quad (1.9)$$

che, date le relazioni (1.4) e (1.8), è uguale a:

$$v = \frac{C}{M} = \frac{M-D}{M} = \frac{M-Md}{M} = 1-d \quad (1.10)$$

ed è detto **fattore di sconto** o **fattore di anticipazione** o **fattore di attualizzazione**.

Dalle relazioni (1.6) e (1.9), poiché le grandezze date fanno riferimento alla medesima operazione finanziaria, si ha che:

$$r = 1+i = \frac{1}{v} = \frac{1}{1-d} \quad (1.11)$$

e, risolvendo rispetto a i , v e d :

$$i = r-1 = \frac{1-v}{v} = \frac{d}{1-d} \quad (1.12)$$

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = 1-d \quad (1.13)$$

$$d = \frac{r-1}{r} = \frac{i}{1+i} = 1-v \quad (1.14)$$

Le relazioni tra i , r , d e v sono indicate nel prospetto seguente, la cui lettura è immediata (infatti, tutte le grandezze i , r , d e v indicate nella prima colonna sono espresse in funzione delle corrispondenti grandezze indicate nella prima riga):

	i	r	d	v
i	—	$r-1$	$\frac{d}{1-d}$	$\frac{1-v}{v}$
r	$1+i$	—	$\frac{1}{1-d}$	$\frac{1}{v}$
d	$\frac{i}{1+i}$	$\frac{r-1}{r}$	—	$1-v$
v	$\frac{1}{1+i}$	$\frac{1}{r}$	$1-d$	—

Se si esprime r in funzione delle due variabili x e y che rappresentano, rispettivamente, la data iniziale e la data finale del periodo di investimento $[x, y]$, si ha che $r_{x,y}$ è la funzione o **legge di capitalizzazione** ed esprime il montante alla data y del capitale unitario investito alla data x .

Dalle (1.12), (1.13) e (1.14) si ottengono le corrispondenti leggi:

- $i(x,y)$ è la **legge dell'interesse**;
- $v(x,y)$ è la **legge del valore attuale**;
- $d(x,y)$ è la **legge dello sconto**.

che sono dette **leggi a due variabili**.

Se si tiene fisso x e, in corrispondenza, si fa variare y , si può porre $t = y - x$, ottenendo una **legge a una variabile** che rappresenta la durata dell'investimento. Ad esempio:

$$r(x, y) = r(t)$$

Nella pratica, i fattori di montante e di sconto sono specificati da espressioni matematiche che li esprimono come funzioni del tempo e di un altro parametro che generalmente è rappresentato dal tasso di interesse o di sconto.

Guardandole come funzioni del solo tempo (fissando quindi il valore del parametro tasso) le caratteristiche di tali funzioni sono espresse di seguito.

CARATTERISTICHE DEL FATTORE DI MONTANTE

1. $r(t) = 1$ per $t = 0$;
2. $r(t) \geq 1$ per $t \geq 0$;
3. $r(t_2) \geq r(t_1)$ per $t_2 \geq t_1$, ossia la funzione è crescente per il cosiddetto *postulato del rendimento del denaro*.

CARATTERISTICHE DEL FATTORE DI SCONTO

1. $v(t) = 1$ per $t = 0$;
2. $0 \leq v(t) \leq 1$ per $t \geq 0$;
3. $v(t_2) \leq v(t_1)$ per $t_2 \leq t_1$, ossia la funzione è decrescente.

Una volta specificata la funzione matematica del fattore di montante o del fattore di sconto espressi in funzione del tempo e del tasso di interesse, si dice che si è dato un **regime finanziario**.

Se si fissa il valore del tasso, le funzioni che esprimono il fattore di montante o il fattore di sconto, espresse unicamente in funzione del tempo, si dicono **leggi finanziarie** del regime considerato.

Due regimi $r(t, i)$ e $v(t, i)$, rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione, si dicono **coniugati** se:

$$r(t, i) \cdot v(t, i) = 1$$

Il prospetto di pagina seguente indica i regimi finanziari di capitalizzazione e i corrispondenti regimi di attualizzazione a essi coniugati che andremo a studiare.

Regimi di capitalizzazione	Regimi di attualizzazione
Interesse semplice	Sconto razionale
Interesse composto	Sconto composto
Interesse anticipato	Sconto commerciale

2. REGIME FINANZIARIO DELL'INTERESSE SEMPLICE E DELLO SCONTO RAZIONALE

2.1 Interesse semplice

Nel **regime finanziario dell'interesse semplice** l'interesse si calcola sul capitale, proporzionalmente al tempo.

Assumendo come unità di misura del tempo l'anno, sia i il tasso effettivo annuo d'interesse, ossia l'interesse prodotto da un capitale unitario in un anno, allora, l'interesse prodotto dopo il tempo t per ogni unità di capitale impiegato è:

$$i(t) = it \quad (2.1)$$

Dalle (1.11), (1.13) e (1.14) si ottengono le seguenti leggi:

$$r(t) = 1 + it \quad (2.2)$$

$$v(t) = \frac{1}{1 + it} \quad (2.3)$$

$$d(t) = \frac{it}{1 + it} \quad (2.4)$$

Sia C il capitale impiegato, dalla (2.1) si ha che l'interesse prodotto da C nel tempo t è:

$$I(t) = Cit \quad (2.5)$$

da cui le *formule inverse*:

$$C(t) = \frac{I}{it}; \quad i(t) = \frac{I}{Ct}; \quad t = \frac{I}{Ci}$$

Analogamente, dalla (2.2), si ha che il montante M prodotto dal capitale C è:

$$M(t) = C(t)r(t) = C(t)(1 + it) \quad (2.6)$$

da cui le *formule inverse*:

$$C(t) = \frac{M}{1 + it} \quad i(t) = \frac{M - C}{Ct} \quad t = \frac{M - C}{Ci}$$

Interessante è il calcolo del tempo occorrente perché un dato capitale C , impiegato in regime di capitalizzazione semplice, diventi $M = mC$, con m numero reale positivo, diverso da 1.

La terza delle formule inverse appena viste, sostituendo a M il valore mC , diviene:

$$t = \frac{mC - C}{Ci} = \frac{(m-1)C}{Ci} = \frac{m-1}{i}$$

da cui, se si vuole ottenere un montante M pari a 2 volte il capitale iniziale C , ossia $M = 2C$, si ha:

$$t = \frac{2-1}{i} = \frac{1}{i}$$

Praticamente, il **tempo** occorrente a un **capitale** per **raddoppiarsi** è pari al reciproco del tasso d'interesse.

APPLICAZIONI

Operazioni finanziarie con scadenza non superiore all'anno.

Se si esprime il tempo in giorni (g), anziché in anni, si ha che $t = \frac{g}{360}$, dove 360 è l'anno commerciale.

ESEMPIO 1

Un capitale di 900,43 € è impiegato in regime semplice al tasso annuo effettivo d'interesse del 6%. Calcolare gli interessi e il montante prodotti dopo 1 anno e 3 mesi in regime di interesse semplice.

Dalla (2.5) si ha che l'interesse prodotto da 900,43 € al tasso $i = 0,06$ e per un tempo $t = \frac{15}{12}$ ammonta a:

$$I = 900,43 \cdot 0,06 \cdot \frac{15}{12} = 67,53$$

Il montante è uguale a:

$$M = 900,43 + 67,53 = 967,96$$

ESEMPIO 2

Si impiegano per 7 mesi a interesse semplice $\frac{2}{3}$ di un capitale al tasso annuo $i = 0,06$ e il rimanente $\frac{1}{3}$ al tasso annuo $i' = 0,07$, ottenendo dal primo impiego 850,19 € in più rispetto al secondo. Qual è il capitale complessivamente impiegato?

Sia C il capitale impiegato, l'interesse prodotto dal primo impiego di C è:

$$I_1 = \frac{2}{3}C \cdot 0,06 \cdot \frac{7}{12} = \frac{0,84}{36}C$$

L'interesse prodotto dal secondo impiego è:

$$I_2 = \frac{1}{3}C \cdot 0,07 \cdot \frac{7}{12} = \frac{0,49}{36}C$$

Segue che, essendo:

$$I_1 = I_2 + 850,19$$

si ha:

$$I_1 = \frac{0,84}{36}C = \frac{0,49}{36}C + 850,19$$

Risolvendo rispetto a C :

$$C = 850,19 \cdot \frac{36}{(0,84 - 0,49)} = 87.448,11$$

2.2 Sconto razionale

Nel regime finanziario considerato, il **fattore di sconto** è espresso dalla (2.3). La formula del **tasso di sconto** per un'operazione di durata t è la (2.4); volendolo esprimere in funzione del tasso effettivo di sconto annuo d , tenendo presente la (1.12), esso diviene:

$$d(t) = \frac{it}{1+it} = \frac{\frac{d}{1-d}t}{1 + \frac{d}{1-d}t}$$

da cui:

$$d(t) = \frac{dt}{1+d(t-1)} \quad (2.7)$$

che, riferito a capitale dovuto M è:

$$D(t) = \frac{Mdt}{1+d(t-1)}$$

RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE

1. Funzione: $r(t) = 1 + it$

Supposta definita la funzione per un tempo t continuo, la sua rappresentazione grafica è la seguente:

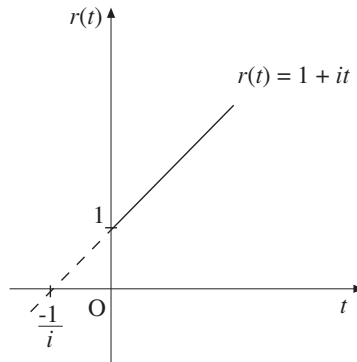


Fig. 1

La funzione è rappresentata da una retta di coefficiente angolare pari a i e che interseca l'asse delle ascisse nel punto $\left(-\frac{1}{i}, 0\right)$ e l'asse delle ordinate nel punto $(0, 1)$ e per questo è detta **legge**

lineare. Finanziariamente è valida solo per $t \geq 0$.

Essendo il coefficiente angolare di tale retta positivo e pari a i , la funzione è crescente (il montante è infatti funzione crescente del tempo e del tasso di interesse).

2. Funzione: $i(t) = it$

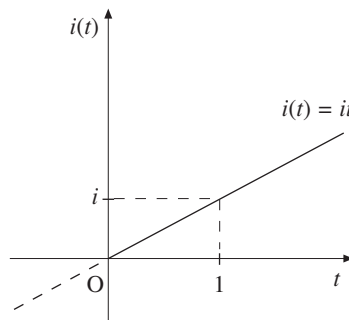


Fig. 2

È una retta passante per l'origine degli assi con coefficiente angolare positivo pari a i , per cui la funzione è crescente.

Per $t = 0$ è $i(t) = 0$, quindi il grafico della funzione passa per l'origine degli assi.

Ovviamente, anche tale funzione è finanziariamente valida solo per $t \geq 0$.

3. Funzione: $v(t) = \frac{1}{1+it}$

Supposta definita la funzione per un tempo t continuo, la sua rappresentazione grafica è la seguente:

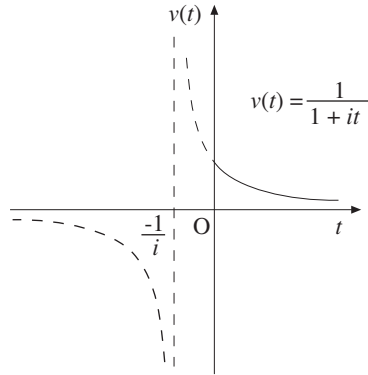


Fig. 3

La $v(t)$ rappresenta un'iperbole che ha per asintoti la retta $t = -\frac{1}{i}$ e l'asse delle ascisse, inoltre la funzione è finanziariamente valida solo per $t \geq 0$.

Si può dire che per $t = 0$ la funzione assume valore 1 mentre per $v(t) = 0$ si ha: $t = -\frac{1}{i}$.

Inoltre, se calcoliamo la derivata prima della funzione $v(t)$:

$$v'(t) = \frac{-i}{(1+i \cdot t)^2}$$

si ha che $v'(t) < 0$ per ogni t non negativa; quindi la funzione è decrescente.

3. REGIME FINANZIARIO DELL'INTERESSE E DELLO SCONTO COMPOSTO

3.1 Interesse composto

Nel **regime finanziario dell'interesse composto**, il periodo di impiego di un capitale è diviso in intervalli, detti **periodi di capitalizzazione**, al termine di ciascun periodo gli interessi maturati sono aggiunti al capitale e fruttano anch'essi nel periodo successivo.

Si realizza, in tal modo, la **capitalizzazione degli interessi**.

Consideriamo un capitale unitario impiegato ad interesse composto con capitalizzazione annua e al tasso annuo unitario i ; il montante del suddetto capitale dopo un anno è:

$$r_1 = 1 + i$$

Durante il secondo anno, il capitale messo a frutto non è il capitale iniziale (unitario), ma è r_1 , per cui il montante di 1 alla fine del secondo anno è:

$$r_2 = r_1(1+i) = (1+i)(1+i) = (1+i)^2$$

Si dimostra, per induzione, che il montante composto di un capitale unitario alla fine del t -esimo anno è:

$$r(t) = (1+i)^t \quad (3.1)$$

Dalle (1.12), (1.13) e (1.14) si ottengono le seguenti leggi:

$$i(t) = (1+i)^t - 1 \quad (3.2)$$

$$v(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t} = v^t \quad (3.3)$$

$$d(t) = 1 - \frac{1}{(1+i)^t} = 1 - v^t = 1 - (1-d)^t \quad (3.4)$$

Sia C il capitale impiegato, dalla (3.2) si ha che l'interesse prodotto da C nel tempo t è:

$$I(t) = Ci(t) = C[(1+i)^t - 1] \quad (3.5)$$

Analogamente, dalla (3.1), si ha che il montante M prodotto dal capitale C è:

$$M(t) = C(1+i)^t \quad (3.6)$$

da cui le formule inverse:

$$C(t) = \frac{M}{(1+i)^t}; \quad i(t) = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1; \quad t = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)}$$

Dalla terza delle formule inverse appena viste (in cui \log sta a indicare il logaritmo decimale, anche se è possibile usare logaritmi di qualunque base) si può ottenere il tempo occorrente perché un dato capitale C , impiegato in regime di capitalizzazione composta, diventi $m \cdot C$, con m numero reale positivo, diverso da 1; infatti, se si vuole un montante M pari a 2 volte il capitale iniziale C , ossia $M = 2C$, si ha:

$$t = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)} = \frac{\log 2C - \log C}{\log(1+i)} = \frac{\log \frac{2C}{C}}{\log(1+i)} = \frac{\log 2}{\log(1+i)}$$

In generale, per un montante $M = mC$, si ha:

$$t = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)} = \frac{\log mC - \log C}{\log(1+i)} = \frac{\log m}{\log(1+i)}$$