

### 3.3 DAL CONCETTO DI UTILITÀ CARDINALE ALLA TEORIA DELL'UTILITÀ ORDINALE

La teoria economica neoclassica ha sviluppato due diversi approcci per risolvere il problema di scelta del consumatore:

- l'**utilità cardinale**;
- l'**utilità ordinale**.

Discutendo poco fa il significato di utilità totale e marginale, abbiamo accennato al fatto che gli economisti nel secolo scorso assumevano che queste grandezze fossero misurabili con numeri **cardinali**, cioè che fosse possibile valutare *quanta* soddisfazione deriva dal consumo di un determinato bene, associando ad essa un numero (è ciò che abbiamo fatto nella tabella 3.1).

L'ipotesi che l'utilità sia un'entità misurabile e confrontabile sembra essere però poco credibile e tale apparve anche a numerosi economisti (tra i quali Edgeworth e Pareto) che contestarono la validità di questa ipotesi e diedero vita ad un nuovo approccio alla teoria del consumatore basato sulla nozione di **utilità ordinale**.

Questa è, ancora oggi, la formulazione prevalente dello studio del comportamento del consumatore ed è quella che d'ora in poi anche noi seguiremo. Secondo Vilfredo Pareto, poiché l'**utilità** non è una proprietà fisica dei beni ma è una **grandezza soggettiva e psicologica**, non solo **non è possibile misurarla** ma non è neppure necessario farlo. Tutto ciò che occorre è che il consumatore sia in grado di confrontare diverse alternative di consumo e di esprimere le proprie preferenze rispetto a queste alternative.

Cerchiamo di chiarire meglio le differenze nei due approcci con un **esempio**: supponiamo che un individuo si trovi di fronte a due beni fra i quali scegliere, ad esempio un biglietto per il cinema e l'acquisto di un libro che comportano una stessa spesa.

Secondo l'approccio dell'utilità cardinale l'individuo confronta l'utilità che potrebbe ricavare dalle due azioni (ad esempio: il cinema ha un'utilità pari a 10, mentre il libro arreca una soddisfazione pari a 15) e sceglie in base al valore più elevato associato a ciascuna di esse (in questo caso sceglierebbe il libro).

In base all'approccio dell'utilità ordinale non è necessario alcun «conto» di questo tipo: se l'individuo sceglie di acquistare il libro anziché andare al cinema significa che preferisce leggere piuttosto che vedere un film e questo è tutto ciò che ci occorre per capire e spiegare il comportamento del consumatore.

Entriamo ora più nel dettaglio di questi comportamenti specificando:

- come si possono definire e rappresentare le preferenze dell'individuo;
- quali sono i vincoli alle scelte del consumatore;

— in quale modo l'individuo determina le sue scelte ottimali cioè quelle che gli consentono di rendere massima la sua utilità, date le sue preferenze e dati i vincoli a cui è soggetto.

### 3.4 LE PREFERENZE DEL CONSUMATORE E LE CURVE DI INDIFERENZA

Per semplificare la nostra analisi supponiamo che il nostro consumatore debba scegliere soltanto tra due beni: ad esempio, cibo e abbigliamento. Questa semplificazione ci permette di rappresentare le scelte del consumatore su un grafico a due dimensioni, in cui ciascuno degli assi riporta le quantità di beni considerati. Poiché ci interessano quantità positive di beni, consideriamo solo il primo quadrante del sistema cartesiano (vedi paragrafo 1.3.2).

Lo spazio geometrico identificato dagli assi delimita il **campo di scelta del consumatore** e si chiama **spazio del consumo** (figura 3.3). Qualunque punto all'interno di questo spazio individua una possibile combinazione dei due beni. Un'ulteriore ipotesi che viene fatta per comodità è che i beni considerati, qualunque essi siano, sono perfettamente divisibili: in questo modo i punti all'interno di questo spazio possono essere infiniti nel senso che è sempre possibile specificare una qualunque combinazione fra i due beni. Naturalmente non sempre questa ipotesi è realistica: molti beni, come un'auto o un libro o uno stereo, non sono ovviamente divisibili. Possono esserlo, invece, almeno relativamente, alcuni beni rispetto ai quali possiamo considerare quantità via via inferiori (come il latte o la carne). In ogni caso è un'ipotesi che seguiremo perché ci aiuta a semplificare il problema e non altera comunque il nostro ragionamento.

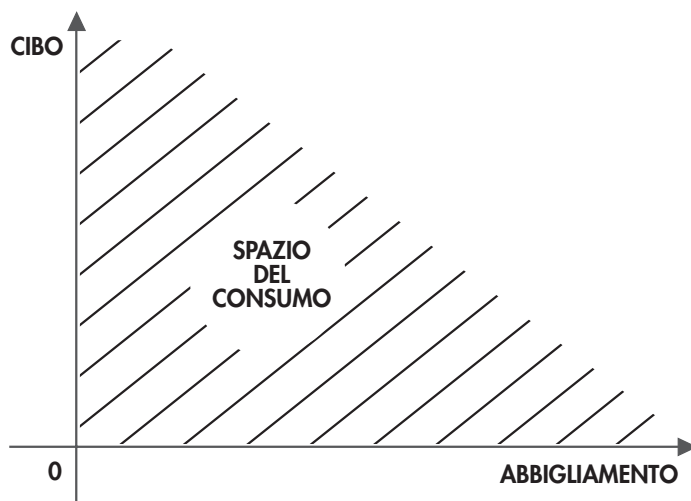


FIGURA 3.3 - Lo spazio del consumo

Con il termine **paniere** indichiamo **una qualunque combinazione possibile dei due beni** all'interno di questo spazio. Nella figura 3.4, ad esempio, il punto indicato con la lettera *X* rappresenta un paniere che contiene 7 unità di cibo e 3 di abbigliamento; il paniere *Y* contiene invece 6 unità del primo bene e 5 del secondo.

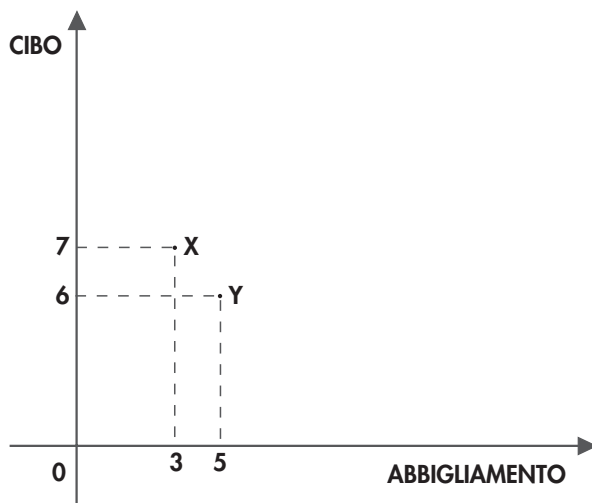


FIGURA 3.4 - Possibili combinazioni di beni: i panieri

### 3.4.1 Le preferenze del consumatore

Se i possibili panieri individuabili all'interno dello spazio del consumo sono infiniti dobbiamo cercare di capire il modo in cui il consumatore classifica ed ordina questi infiniti punti. La prima ipotesi che facciamo è che il consumatore, di fronte a panieri alternativi tra i quali scegliere, sia sempre in grado di esprimere delle **relazioni di preferenza o di indifferenza**.

Se la scelta deve essere effettuata tra il paniere *X* e il paniere *Y* indicati in figura 3.4, il consumatore, in base ai propri gusti, potrà fare una delle tre seguenti affermazioni:

- a) *preferisco il paniere X al paniere Y*  
oppure
- b) *preferisco il paniere Y al paniere X*  
oppure
- c) *sono indifferente tra il paniere X e il paniere Y.*

Gli economisti adottano una particolare simbologia per riassumere queste possibili scelte, indicando con *P* la relazione di preferenza e con *I* la relazione di indif-

ferenza. Le tre possibili alternative sopra indicate possono allora essere riscritte nel seguente modo mantenendo intatto il loro significato:

- a)  **$XPY$**   
**oppure**  
 b)  **$YPX$**   
**oppure**  
 c)  **$XIY$**

Le relazioni di preferenza e di indifferenza permettono di confrontare a due a due i possibili panieri ed esprimere un **ordinamento di preferenza**, cioè una classificazione dei panieri stessi in relazione alla loro desiderabilità. Come già avevamo accennato all'inizio di questo Capitolo, i gusti possono essere molto diversi da consumatore a consumatore: a molti piace Bruce Springsteen, ma molti altri preferiscono Beethoven e naturalmente la teoria economica non è in grado di definire gli ordinamenti di preferenza per ciascuno di noi.

Gli economisti assumono però che gli ordinamenti di preferenza dei consumatori razionali godano di alcune importanti proprietà comuni. Per ora, fermiamo l'attenzione su tre di queste **proprietà**: una quarta verrà discussa più avanti.

***Gli ordinamenti di preferenza sono completi***: il consumatore di fronte a tanti possibili panieri è sempre in grado di confrontarli a due a due e di esprimere un giudizio. Questa proprietà è, di fatto, quella che abbiamo già anticipato in precedenza. Posso dire che preferisco  $X$  a  $Y$ , o viceversa che preferisco  $Y$  a  $X$  o, ancora, che sono indifferente tra i due. In ogni caso sono sempre in grado di esprimermi di fronte alla scelta fra panieri alternativi (la risposta «non so» o «sono incerto» non vale).

***Gli ordinamenti di preferenza sono transitivi***: se preferiamo Bruce Springsteen a Beethoven e Beethoven alla musica jazz allora, dovendo scegliere tra Bruce Springsteen e la musica jazz, sceglieremo il primo. La ragione di questa proprietà (che si applica anche nel caso di una relazione di indifferenza) è di evitare che vi possano essere delle scelte incoerenti o contraddittorie da parte del consumatore. In sintesi, dire che un ordinamento di preferenza (e di indifferenza) è transitivo significa affermare che, rispetto a tre panieri possibili  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ :

— se	$XPY$	e	$YPZ$	<b>allora</b>	$XPZ$
— se	$XIY$	e	$YIZ$	<b>allora</b>	$XIZ$
— se	$XPY$	e	$YIZ$	<b>allora</b>	$XPZ$
— se	$XIY$	e	$YPZ$	<b>allora</b>	$XPZ$

***Gli ordinamenti di preferenza godono della proprietà di non sazietà***: ciò significa che una quantità maggiore di un bene è sempre preferita rispetto ad una quantità minore. Con riferimento, ad esempio, al panierino  $X$  indicato in figura 3.4, il

quale contiene 7 unità di cibo e 3 di abbigliamento, se il consumatore potesse scegliere tra il paniere  $X$  ed un ipotetico paniere  $W$  contenente sempre 7 unità di cibo ma 4 unità di abbigliamento, in base a questa proprietà il nostro consumatore razionale sceglierebbe certamente il paniere  $W$ . La quantità di cibo è la stessa nei due casi ma  $W$  contiene un'unità in più di abbigliamento.

Dopo aver illustrato queste prime tre proprietà degli ordinamenti di preferenza vediamo ora come sia possibile arrivare ad una loro rappresentazione grafica. La soluzione elaborata dalla teoria economica è quella di ricorrere alle **curve di indifferenza** cioè curve che si ottengono congiungendo tutti i punti (infiniti) che **individuano panieri di beni indifferenti per il consumatore**. Si tratta cioè di panieri che, pur essendo diversi tra loro in quanto contengono combinazioni diverse di beni arrecano al consumatore lo stesso livello di utilità. Queste curve di indifferenza, di solito, hanno l'aspetto indicato in figura 3.5.

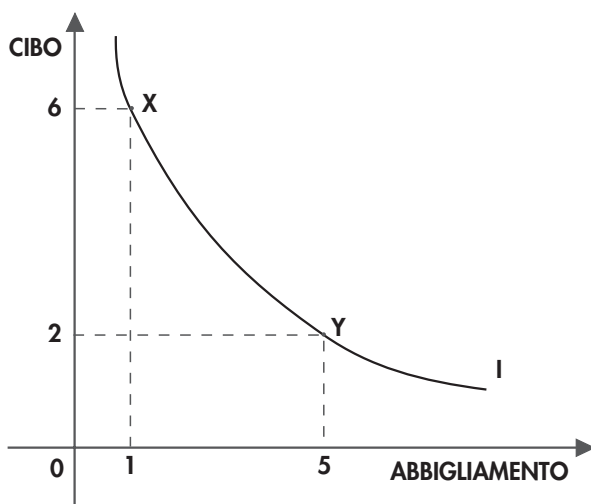


FIGURA 3.5 - La curva di indifferenza

Ad esempio, i panieri  $X$  e  $Y$  indicati in figura 3.5, pur essendo composti da quantità diverse dei due beni (6 unità di cibo e 1 di abbigliamento nel caso del paniere  $X$ ; 2 di cibo e 5 di abbigliamento nel caso del paniere  $Y$ ), sono indifferenti per il consumatore. L'uno o l'altro gli permettono di realizzare lo stesso livello di utilità. Come possiamo vedere, la curva di indifferenza è *decescente* perché per mantenere invariato il livello di utilità (cioè per restare sulla stessa curva di indifferenza) la diminuzione del consumo di un bene va compensata con l'aumento dell'altro. Così, nell'esempio, per passare da un consumo di 6 unità di cibo ad uno inferiore, pari a 2, il consumatore deve poter disporre di una quantità maggiore di abbigliamento (che, infatti, passa da 1 a 5 unità).

Se tutti i panieri collocati su una stessa curva di indifferenza sono ugualmente preferiti dal consumatore, tutti quelli che si collocano al di sotto di questa curva sono invece più svantaggiosi per il consumatore (in quanto composti da quantità minori di almeno uno dei due beni) mentre tutti quelli che si posizionano al di sopra di una data curva di indifferenza sono più vantaggiosi (contengono quantità maggiori di almeno un bene e quindi danno maggiore utilità).

Per l'ipotesi di non sazietà di cui gode l'ordinamento di preferenza, diremo allora che il consumatore, preferirà sempre il paniere *Y* rispetto a quello identificato con la lettera *K* nella figura 3.6. Al contrario avviene con il paniere *W*, preferito al paniere *X*. Inoltre, poiché per il consumatore il paniere *X* è indifferente a *Y* (entrambi sono sulla stessa curva di indifferenza) ma *Y* è preferito a *K*, per l'ipotesi di transitività deve anche valere che *X* è preferito a *K*.

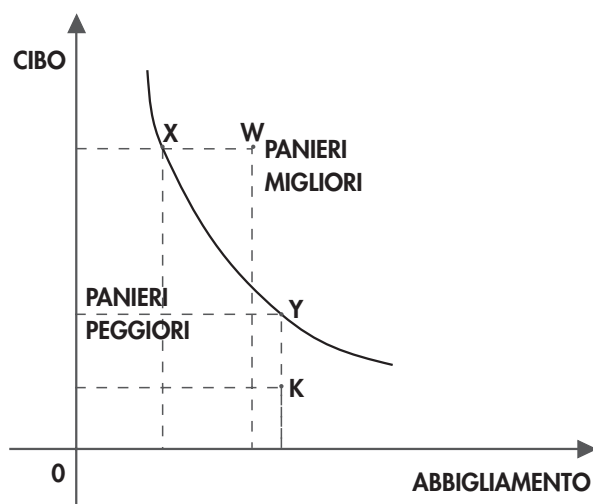


FIGURA 3.6 - Panieri migliori e panieri peggiori

In generale, è possibile disegnare non una sola curva di indifferenza ma un'intera famiglia di curve che viene definita con il termine di **mappa di indifferenza**.

In base alla nozione di utilità ordinale, a ciascuna di queste curve sarà associato un indice che esprime il livello di soddisfazione del consumatore. Tanto **più la curva di indifferenza è vicina all'origine degli assi, tanto minore è il livello di soddisfazione** del consumatore.

Viceversa, a mano a mano che ci allontaniamo dall'origine degli assi il livello del benessere del consumatore sarà via via più elevato.

Nella figura 3.7 è rappresentata una mappa di indifferenza che esprime alcuni possibili livelli di benessere per il nostro consumatore.

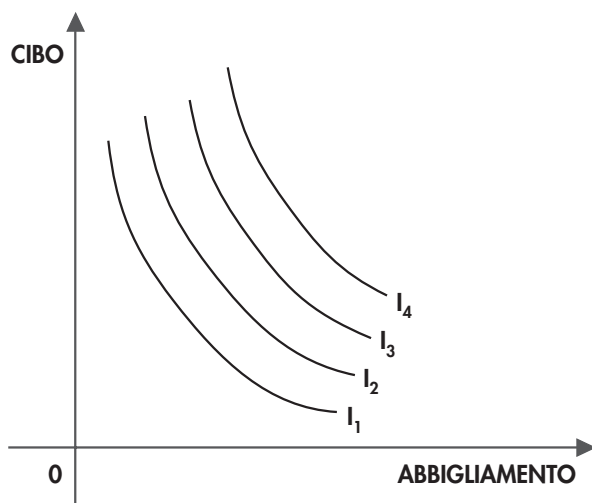


FIGURA 3.7 - La mappa di indifferenza

Tutti i panieri che si trovano su una qualunque di queste curve di indifferenza (ad esempio la  $I_3$ ) sono preferiti rispetto ad ogni altro paniere che si trova su una delle curve di indifferenza più basse (la  $I_2$  o la  $I_1$ ). Al contrario, tutti i panieri rappresentati sulla  $I_3$  sono meno preferiti rispetto a quelli che appartengono a curve di indifferenza di grado più elevato (ad esempio rispetto ai panieri che si trovano sulla  $I_4$ ). Se il consumatore si trova su una curva di indifferenza più elevata significa quindi che il suo livello di benessere è superiore.

Ricordiamo però che, in base a quanto detto sul significato di utilità ordinale, non è importante il valore dell'indice che assegniamo alle curve di indifferenza (avremo potuto indicarle con  $I_A, I_B, I_C, \dots, I_Z$  specificando semplicemente che  $I_A < I_B < I_C \dots < I_Z$ ). Ciò che conta nella rappresentazione delle preferenze del consumatore è solo l'*ordine* in cui sono posizionate le curve e non il particolare valore numerico che ad esse assegniamo.

### 3.4.2 Il saggio marginale di sostituzione

Discutendo il significato delle curve di indifferenza abbiamo visto che, se due panieri di beni si trovano sulla stessa curva, il livello di benessere per l'individuo non cambia; abbiamo anche sottolineato che, generalmente, le curve di indifferenza sono decrescenti perché, per mantenere invariato il livello di soddisfazione, la diminuzione della quantità disponibile di un bene va compensata con un aumento dell'altro bene.

Ritornando alla figura 3.5, possiamo vedere che il paniere  $X$  e il paniere  $Y$  sono indifferenti per il consumatore, in quanto si trovano sulla stessa curva, ma la composizione dei due panieri è diversa: l'individuo, passando dal paniere  $X$  al paniere

$Y$ , rinuncia ad una certa quantità di cibo in cambio di un certo numero di unità di abbigliamento. Gli economisti, per specificare in modo più preciso questa relazione di scambio di un bene con un altro, ricorrono al concetto di **saggio marginale di sostituzione**, il quale non è altro che *il rapporto tra la quantità di un bene a cui il consumatore è disposto a rinunciare e la quantità dell'altro bene che riceve in cambio*.

Questa grandezza viene definita **marginale perché è riferita a variazioni molto piccole** (marginali, appunto). Restando al nostro esempio, possiamo definire formalmente il saggio marginale di sostituzione fra cibo ( $C$ ) e abbigliamento ( $A$ ) nel seguente modo:

$$[3.2] \text{SMS}_{CA} = - \Delta C / \Delta A$$

dove il simbolo  $\Delta$  indica la variazione, in aumento o in diminuzione, delle quantità considerate. Quando le curve di indifferenza sono inclinate negativamente, come abbiamo assunto finora, il SMS ha sempre segno negativo: il consumatore rinuncia ad una certa quantità di un bene in cambio di un'unità aggiuntiva dell'altro. In tutti questi casi, il segno del SMS si può anche omettere e si considera solo il suo valore assoluto.

Vediamo ora di calcolare il SMS relativo al caso indicato nella figura 3.8.

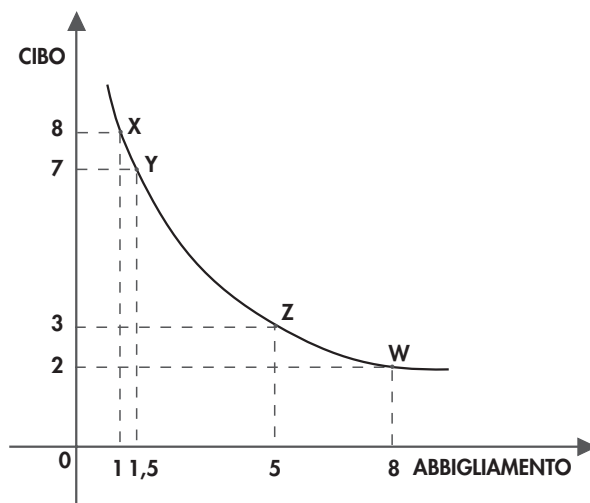


FIGURA 3.8 - Il saggio marginale di sostituzione

Osservando il grafico, possiamo vedere che i quattro panieri indicati ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $W$ ) sono indifferenti per il consumatore in quanto si trovano sulla stessa curva di indifferenza: tuttavia per passare dal paniere  $X$  (che contiene 8 unità del primo bene e 1 unità del secondo) al paniere  $Y$  il consumatore è disposto a rinunciare ad una unità di cibo in cambio di una quantità proporzionalmente piccola di abbiglia-

mento (pari a 0,5). La spiegazione di questo comportamento è dovuta al fatto che il nostro individuo con il paniere iniziale  $X$  dispone di una quantità elevata in senso assoluto di cibo ed una quantità invece molto piccola dell'altro bene. Il  $SMS_{CA}$  in questo caso è pari a  $1/0,5 = 2$  (o, meglio,  $-1/0,5 = -2$ ).

Anche i panieri  $Z$  e  $W$  sono indifferenti tra loro, ma in questo secondo caso il consumatore è disposto a rinunciare ad un'unità di cibo solo se riceve in cambio 3 unità di abbigliamento: la spiegazione ancora una volta è legata alle quantità assolute di beni presenti nei due panieri alternativi.

Tanto più piccola è la quantità disponibile di un bene tanto più lo consideriamo prezioso e quindi siamo disposti a rinunciare ad esso solo se veniamo compensati con quantità sempre maggiori dell'altro bene. Se con riferimento ai panieri  $Z$  e  $N$  calcoliamo il saggio marginale di sostituzione, otteniamo  $SMS_{CA} = 1/3 = 0,33$ , cioè un valore più piccolo rispetto al caso precedente. Possiamo ripetere questo esercizio per qualunque altra possibile scelta alternativa: ciò che otterremo sempre è che spostandoci in basso lungo la curva di indifferenza il saggio marginale di sostituzione è via via decrescente (questa assunzione ha lo stesso significato dell'ipotesi di utilità marginale decrescente che abbiamo discusso nel paragrafo 3.2).

Quando vale questo tipo di relazione le curve di indifferenza hanno sempre la forma indicata nelle precedenti figure: sono cioè convesse verso l'origine degli assi. **Il saggio marginale di sostituzione è pertanto una misura dell'inclinazione della curva di indifferenza.**

Da un punto di vista intuitivo il fatto che il SMS sia decrescente significa che il consumatore preferisce la varietà, in quanto è disposto a cedere parte dei beni di cui dispone in abbondanza per ottenere una maggior quantità del bene che possiede in misura limitata.

Le conclusioni a cui siamo giunti, ci permettono di enunciare la **quarta proprietà** di cui godono gli ordinamenti di preferenza.

***Gli ordinamenti di preferenza sono caratterizzati da un saggio marginale di sostituzione decrescente:*** la disponibilità del consumatore a cedere un bene in cambio di un altro, fermo restando il suo livello di benessere, varia in relazione alle quantità assolute dei beni di cui dispone; tanto più è piccola la quantità disponibile di un bene, tanto più è svantaggioso rinunciare ad esso e quindi tanto maggiore dovrà essere il compenso in termini di quantità dell'altro bene. A mano a mano che ci spostiamo verso il basso e a destra della curva di indifferenza il valore assoluto del saggio marginale di sostituzione è sempre più piccolo: in queste circostanze **le curve di indifferenza sono convesse verso l'origine degli assi.**

### 3.4.3 Le preferenze nei confronti di beni complementari e di beni perfettamente sostituibili

Le curve di indifferenza convesse presentate nel paragrafo precedente sono quelle più comunemente usate nell'analisi del comportamento del consumatore. Vi sono però alcuni casi in cui, per la relazione che lega tra loro i due beni considerati, le curve di indifferenza assumono una forma diversa. I grafici 3.9 e 3.10 presentano due esempi tipici riferiti rispettivamente a beni che sono sostituti stretti tra loro e ai beni complementari.

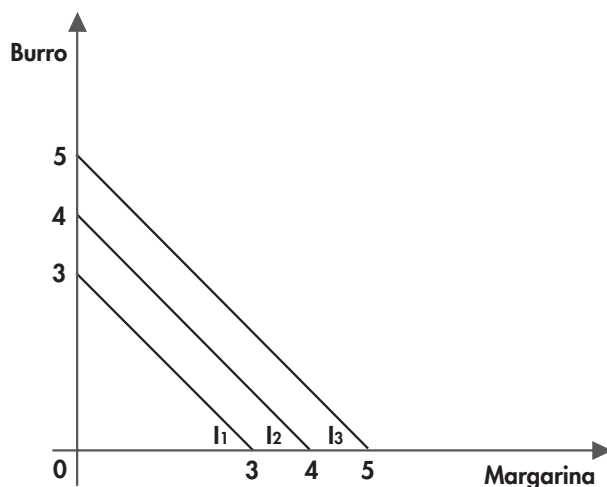


FIGURA 3.9 - Beni sostituti perfetti

Quando due beni possono essere **perfettamente sostituiti** l'uno all'altro la mappa di indifferenza è formata da una serie di **rette parallele** tra loro e in questo caso il saggio marginale di sostituzione SMS è costante lungo la stessa curva di indifferenza. Ad esempio, se il consumatore considera il burro e la margarina come beni perfettamente sostituibili tra loro, lungo la curva di indifferenza  $I_1$  le combinazioni pari a 3 unità di burro e 0 di margarina, 0 unità di burro e 3 di margarina, o una qualunque combinazione intermedia dei due beni, sono indifferenti perché arrecano uno stesso livello di benessere: in questa situazione il SMS è sempre uguale a 1 in qualsiasi punto. Un discorso analogo vale ovviamente per le curve di indifferenza di livello superiore.

Una situazione opposta si verifica nel caso di beni **perfettamente complementari**, cioè di beni che per arrecare utilità devono essere usati congiuntamente e nella stessa proporzione. In questi casi la mappa di indifferenza è rappresentata da una serie di **curve ad angolo retto**.

Così il consumatore che dispone del paniere  $X$  (un paio di sci e i corrispondenti attacchi) si troverà sulla curva di indifferenza  $I_1$  mentre sarà più soddisfatto se

possiede il paniere  $Y$  (due paia di sci e due attacchi) e così via. Poiché in tutti questi casi egli possiede i beni nella proporzione desiderata, una combinazione pari ad esempio a 2 paia di sci e 3 attacchi come quella indicata dal paniere  $Z$  non aumenterà invece il suo grado di soddisfazione (egli resta infatti sulla curva di indifferenza  $I_2$ ).

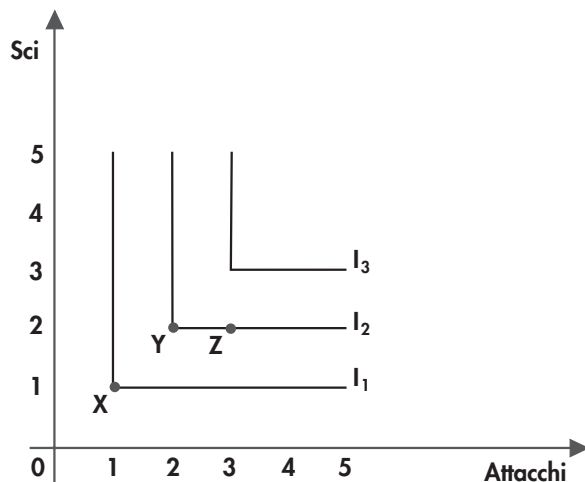


FIGURA 3.10 - Beni perfettamente complementari

Il fatto che due beni siano considerati sostituti o complementari tra di loro è naturalmente del tutto soggettivo: dipende cioè, ancora una volta, dalle preferenze del consumatore. Chi per ragioni dietetiche utilizza soltanto la margarina non sarà disposto in alcun modo a sostituirla con il burro; analogamente, caffè e zucchero possono essere considerati due beni complementari da parte di molte persone ma non da chi ama bere il caffè amaro.

### 3.5 I LIMITI ALLE SCELTE DEL CONSUMATORE: IL VINCOLO DI BILANCIO

Nel paragrafo precedente ci siamo occupati delle preferenze del consumatore e attraverso l'impiego della mappa delle curve di indifferenza abbiamo visto ciò che l'individuo *vorrebbe* consumare. In questo paragrafo faremo un passo avanti nell'analisi, occupandoci di ciò che il consumatore può *permettersi* di consumare.

Abbiamo appena visto che lungo una curva di indifferenza ci sono combinazioni possibili di due beni che sono equivalenti per il consumatore perché arrecano lo stesso livello di utilità, mentre a curve più lontane dall'origine degli assi corrispondono livelli più elevati di benessere. Dobbiamo allora pensare che i con-

sumatori si trovino tutti su curve infinitamente alte? La risposta è no, perché nella maggior parte dei casi ciascuno di noi è soggetto a vincoli di diversa natura. Anche se siamo estremamente golosi il nostro stomaco non è in grado di sopportare quantità illimitate di dolci; possiamo essere degli appassionati di cinema, ma difficilmente siamo in condizioni di poter assistere alla visione ininterrotta di centinaia di film; la maggior parte di noi, inoltre, anche se ha dei bisogni illimitati, di solito non dispone del denaro necessario per soddisfare qualunque tipo di desiderio.

Nel primo caso il vincolo, in qualche modo, è di tipo fisico; nel secondo, la risorsa scarsa è il tempo; nel terzo caso il vincolo è rappresentato dalle risorse monetarie di cui possiamo disporre. È a quest'ultima circostanza che la teoria economica ha dedicato maggiore attenzione e anche noi ora faremo la stessa cosa.

Continuiamo a restare al caso più semplice in cui il consumatore, che dispone di un certo reddito  $R$ , si trova a scegliere fra due diversi beni,  $A$  e  $B$ , i cui prezzi sono rispettivamente  $p_A$  e  $p_B$ . Dato il suo reddito e dati i prezzi dei due beni, egli non potrà permettersi quantità infinitamente grandi dei due beni ma sarà costretto a scegliere quantità  $q_A$  e  $q_B$  compatibili con il suo reddito. Possiamo esprimere il **vincolo di bilancio** del consumatore attraverso una semplice equazione:

$$[3.3] \quad R = p_A q_A + p_B q_B$$

Per cercare di risolvere questa equazione e arrivare ad una rappresentazione grafica del vincolo di bilancio, aiutiamoci con un semplice **esempio** numerico. Assumiamo che il reddito a disposizione del consumatore sia pari a 200 e che i prezzi dei due beni siano rispettivamente pari a  $p_A = 10$  e  $p_B = 5$ ; assumiamo inoltre che il consumatore spenda interamente il suo reddito nell'acquisto dei due beni (in realtà, come vedremo meglio nella Parte III di questo testo, spesso gli individui risparmiano una parte del loro reddito: il problema in ogni caso non cambia perché possiamo considerare il risparmio come una particolare categoria di bene e, in tal caso, la scelta dell'individuo riguarda quanto reddito destinare all'acquisto di un dato bene e quanto destinare invece al risparmio).

Immaginiamo che l'individuo destini l'intero suo reddito ( $R = 200$ ) all'acquisto del solo bene  $A$  rinunciando del tutto al bene  $B$ . In questo caso, poiché il prezzo del bene  $A$  è pari a 10, l'individuo potrà comprare, al massimo, 20 unità del bene  $A$  ( $200/10$ ). Così facendo, abbiamo individuato un primo punto  $C$  sull'asse delle ordinate del grafico 3.11 a cui corrisponde la combinazione di beni ( $q_A = 20$ ;  $q_B = 0$ ). Ripetiamo ora l'esercizio risolvendo il problema opposto: l'individuo spende tutto il suo reddito per l'acquisto del bene  $B$ , che ha un prezzo pari a 5; in questo caso,  $q_B = 40$  (infatti  $200/5 = 40$ ) e  $q_A = 0$ . Riportiamo questo secondo punto  $D$  sull'asse delle ascisse del grafico 3.11: poiché due punti sono sufficienti

ti per tracciare una retta, congiungendo questi due punti otteniamo il vincolo di bilancio.

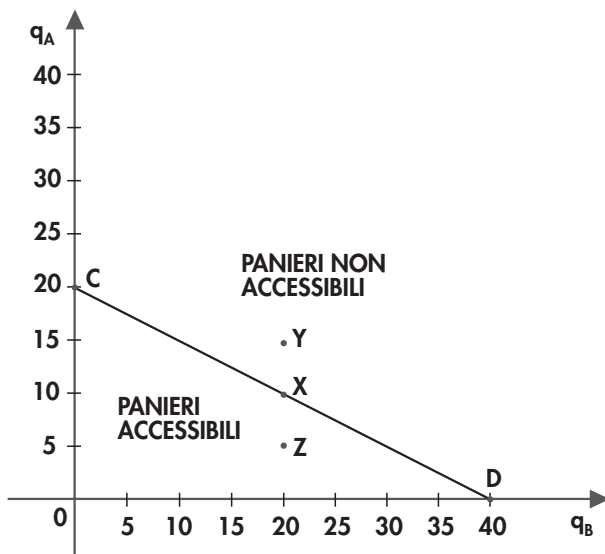


FIGURA 3.11 - Il vincolo di bilancio

La retta di bilancio indicata con  $CD$  divide in due parti lo spazio del consumo. Lungo il vincolo di bilancio e al di sotto di esso vi sono tutti i panieri accessibili per il consumatore: il paniere  $X$ , ad esempio, composto da 10 unità del bene  $A$  e 20 di  $B$  è compatibile con il reddito del consumatore (infatti:  $10 \cdot 10 + 5 \cdot 20 = 200$ ). Anche il paniere  $Z$  è accessibile ( $10 \cdot 5 + 5 \cdot 20 = 150$ ) ma poiché abbiamo assunto che l'individuo destina tutto il suo reddito all'acquisto dei due beni, non lo considereremo perché non rispetta questa condizione. Al contrario il paniere  $Y$  che contiene 15 unità di  $A$  e 20 unità di  $B$  non è accessibile, dato il vincolo di bilancio del consumatore (infatti:  $10 \cdot 15 + 5 \cdot 20 = 250$ ).

### *Una discussione un po' più formale del vincolo di bilancio*

Per comprendere meglio l'importanza e l'utilità della matematica nella soluzione dei problemi economici cerchiamo ora di ripetere in un modo più formale il ragionamento intuitivo che è stato prima seguito per la definizione del vincolo di bilancio. Partendo dall'equazione [3.3], possiamo risolvere questa equazione con alcuni semplici passaggi matematici. Ad esempio, risolvendo rispetto al bene  $A$  otteniamo:

$$[3.4] \quad p_A q_A = R - p_B q_B$$

$$[3.5] \quad q_A = R/p_A - p_B/p_A \cdot q_B$$

Ponendo  $q_B = 0$ , come abbiamo fatto precedentemente supponendo che il consumatore voglia destinare l'intero suo reddito all'acquisto del bene  $A$ , avremo che  $q_A = R/p_A$  e questo ci permette di individuare l'intercetta sull'asse verticale. In modo analogo possiamo risolvere l'equazione [3.3] rispetto al bene  $B$  e troveremo l'intercetta sull'asse delle ascisse.

Se interpretiamo la [3.5] come l'equazione di una retta di tipo standard, cioè del tipo  $f(x) = a - bx$ , è evidente che  $q_A$  rappresenta la nostra variabile dipendente e  $q_B$  è la variabile indipendente. Il primo termine del secondo membro dell'equazione,  $R/p_A$ , **altro non è che l'intercetta  $a$  che taglia**, nel nostro grafico 3.11, l'**asse verticale** mentre il **rapporto  $p_B/p_A$  è il coefficiente angolare  $b$  della funzione e descrive la pendenza della retta**. Poiché il segno di questo rapporto è negativo, la retta è decrescente: se voglio acquistare quantità maggiori di un bene devo rinunciare ad un certo numero di unità dell'altro.

In economia, la pendenza della retta di bilancio ha un preciso significato poiché descrive il rapporto di scambio al quale il consumatore può sostituire un bene ad un altro. Nel nostro caso, poiché  $p_B = 5$  e  $p_A = 10$  questo rapporto è pari a 0,5 il che significa che il consumatore per ottenere un'unità in più del bene A, che ha un prezzo pari a 10, deve rinunciare a 2 unità del bene B. Per questa ragione il rapporto  $p_B/p_A$  si chiama anche **prezzo relativo** del bene A rispetto al bene B.

### 3.6 L'EQUILIBRIO DEL CONSUMATORE

Abbiamo visto come il consumatore ordina i panieri in base alle proprie preferenze e quali possono essere le scelte possibili in relazione al reddito di cui dispone. Siamo ora in grado di determinare la **scelta ottimale del consumatore**, cioè il *punto di equilibrio*: non dobbiamo fare altro che mettere insieme questi due elementi (preferenze e reddito) e stabilire quale sarà il paniere preferito tra tutti quelli ammissibili.

Consideriamo, come al solito, un individuo che vuole consumare due beni (cibo e abbigliamento) e supponiamo che i suoi gusti siano rappresentati dalla mappa di curve di indifferenza indicate in figura 3.12: riportiamo sullo stesso grafico anche il vincolo di bilancio del consumatore, ricavato nel modo descritto nel paragrafo precedente.

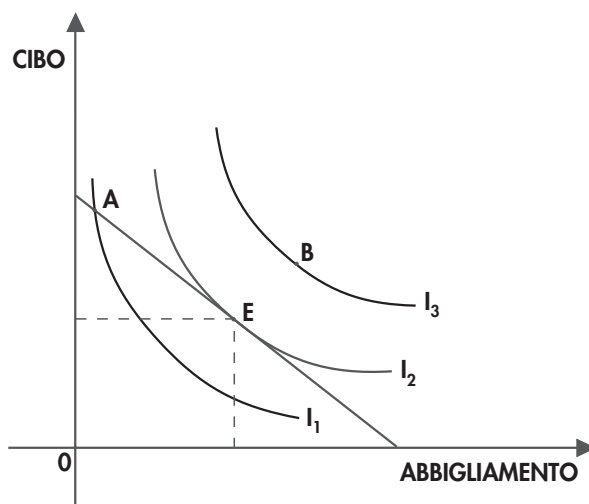


FIGURA 3.12 - L'equilibrio del consumatore

Date le preferenze, il reddito e il prezzo dei due beni, la **scelta ottimale** è rappresentata dal paniere indicato con  $E$ , cioè dal **punto di tangenza fra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza di grado più elevato** (nel nostro caso la  $I_2$ ). Cerchiamo di capire perché. Per l'ipotesi di non sazietà, tutti i panieri collocati su curve di indifferenza più elevate rispetto alla  $I_2$ , sarebbero ovviamente preferiti dal consumatore ma non sono accessibili (si ricordi la fig. 3.11). Per esempio, il paniere  $B$  è composto da quantità maggiori di entrambi i beni e quindi il benessere dell'individuo sarebbe più elevato, ma la spesa che comporta è superiore rispetto al reddito dell'individuo e quindi non è un paniere accessibile.

D'altra parte il paniere  $A$ , che si trova sul vincolo di bilancio, può essere acquistato dal consumatore ma questa scelta porterebbe l'individuo ad un livello di utilità inferiore: siamo infatti sulla curva di indifferenza  $I_1$ , più bassa rispetto a  $I_2$ . È possibile allora distribuire in modo diverso lo stesso ammontare di reddito scegliendo la combinazione  $E$  che si colloca su di una curva di indifferenza di ordine più elevato. In conclusione, per le ipotesi fatte sul comportamento razionale del consumatore e sulle proprietà degli ordinamenti di preferenza, poiché l'obiettivo del consumatore è quello di raggiungere il più elevato grado di soddisfazione in relazione al reddito di cui dispone, la scelta ottimale non può essere che quella descritta nel punto di equilibrio  $E$ .

Ma vi è di più. Nel punto  $E$ , la pendenza del vincolo di bilancio è uguale alla pendenza della curva d'indifferenza  $I_2$ . Come ricorderete la pendenza della curva d'indifferenza non è altro che il SMS, in valore assoluto, tra i beni considerati. Possiamo concludere allora che la soddisfazione del consumatore è massimizzata nel punto in cui:

$$[3.6] \text{ SMS} = \frac{P_C}{P_A}$$

Nel punto  $E$ , dunque, la soddisfazione è massima ed il saggio marginale di sostituzione tra cibo e abbigliamento è uguale al rapporto tra il prezzo del cibo e il prezzo dell'abbigliamento.

Se il saggio marginale è maggiore o minore del rapporto fra i prezzi, la soddisfazione del consumatore non è massima.

### ***La scelta ottima e la relazione fra saggio marginale di sostituzione e utilità marginale***

Possiamo determinare il saggio marginale di sostituzione per mezzo di una generica funzione di utilità  $U(C, A)$ , dove  $C$  e  $A$  sono, come di consueto, cibo e abbigliamento. Sappiamo che il SMS misura l'inclinazione della curva d'indifferenza in corrispondenza di una data combinazione di beni e può essere definito come il saggio in base al quale un consumatore è disposto a sostituire il bene  $A$  con il bene  $C$ . Sappiamo, inoltre, che c'è una differenza fra l'utilità totale ottenuta dal consumo e quella marginale che deriva dal consumo di una quantità aggiuntiva di un bene. L'uti-

lità marginale è una grandezza decrescente: a mano a mano che aumenta il consumo di un bene, l'utilità aumenta in misura via via minore.

Consideriamo, dunque, una variazione nel consumo di ciascun bene che mantenga costante l'utilità e permetta al consumatore di spostarsi lungo la curva di indifferenza. Supponiamo che il consumatore decida di consumare una quantità aggiuntiva del bene  $C$  ( $\Delta C$ ), si muoverà, dunque, verso il basso della curva d'indifferenza. Il consumo aggiuntivo di  $C$  genererà un'utilità marginale  $UMa_C$  e un aumento totale dell'utilità pari a  $UMa_C \Delta C$ . Nel contempo, la diminuzione del consumo di  $A$  ( $\Delta A$ ) farà diminuire l'utilità per ogni unità considerata di una grandezza pari a  $UMa_A$ .

Poiché, come più volte ripetuto, tutti i punti su una curva d'indifferenza generano lo stesso livello di utilità, la soddisfazione totale derivante dal consumo di unità aggiuntive di  $C$  deve bilanciare esattamente la perdita di utilità derivante dal minore consumo di  $A$ . In termini formali:

$$UMa_C (\Delta C) + UMa_A (\Delta A) = 0$$

Per successivi passaggi si può scrivere che:

$$[3.7] \quad -\frac{\Delta A}{\Delta C} = \frac{UMa_C}{UMa_A}$$

L'espressione appena scritta indica che il saggio marginale di sostituzione è pari al rapporto fra le utilità marginali dei due beni. Il SMS ha segno negativo, poiché se si ottiene una quantità maggiore del bene  $C$  si dovrà rinunciare ad una certa quantità del bene  $A$  per mantenere lo stesso livello di utilità. Tuttavia, per semplicità, viene considerato il valore assoluto. Abbiamo anche visto che nel punto in cui i consumatori massimizzano la propria utilità il saggio marginale di sostituzione è pari al rapporto tra i prezzi dei due beni considerati:

$$[3.8] \quad SMS = \frac{P_C}{P_A}$$

poiché il SMS è anche pari al rapporto fra le utilità marginali derivanti dal consumo dei beni  $C$  e  $A$ , possiamo scrivere che:

$$\frac{UMa_C}{UMa_A} = \frac{P_C}{P_A}$$

ovvero

$$[3.9] \quad \frac{UMa_C}{P_C} = \frac{UMa_A}{P_A}$$

L'espressione [3.9] indica che l'utilità è massima quando il consumatore distribuisce le risorse monetarie a sua disposizione in modo tale che l'utilità marginale per una unità di moneta è la stessa per ciascun bene. In pratica, il consumatore acquisterà prima quei beni a cui attribuisce l'utilità più elevata e poi gli altri con utilità via via minore.

L'analisi fin qui condotta può essere rivista utilizzando il concetto di derivata, ragionando, in pratica, in termini di variazioni infinitesimali delle quantità consumate dei due beni. Bisogna tenere presente però che la funzione di utilità è una **funzione in due variabili reali**. Per funzioni reali in due variabili s'intendono quelle leggi che ad ogni coppia di numeri reali associano uno e un solo numero reale. La funzione di utilità, in particolare, associa ad ogni coppia di beni (ad esempio cibo e abbigliamento) il rispettivo livello di utilità ordinale. Per le funzioni in due varia-

bili, il concetto di derivata è differente; infatti, si può aumentare o una variabile o l'altra. La variabile che non viene aumentata rimane costante. Dunque, le derivate sono due e prendono il nome di **derivate parziali**.

Partiamo dalla consueta funzione di utilità  $U(C, A)$ . In termini formali, l'utilità marginale che il consumatore trarrebbe dal consumo di un po' più di cibo non è altro che la derivata parziale della funzione di utilità,  $U(C, A)$ , rispetto a  $C$ , mantenendo costante il consumo di  $A$ :

$$UMa_C(C, A) = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \frac{U(C + \Delta C, A) - U(C, A)}{\Delta C} = \frac{\partial U(C, A)}{\partial C}$$

Ciò che bisogna chiedersi è: quali sono le combinazioni di  $C$  ed  $A$  che consentono al consumatore di mantenere sempre lo stesso livello di soddisfazione?

In termini formali, quanto detto può essere espresso come:

$$[3.10] \quad \bar{U} = U(C, A)$$

L'espressione appena scritta indica una curva di indifferenza con un dato livello di utilità che si indica con  $\bar{U}$ . Ora, poiché la pendenza della curva di indifferenza è misurata dal saggio marginale di sostituzione possiamo esprimere tale grandezza in termini di utilità marginali. È necessario cioè trovare quelle combinazioni di  $C$  e  $A$  che lascino inalterata l'utilità. Se differenziamo totalmente l'espressione [3.10], si ha che:

$$[3.11] \quad d\bar{U} = 0 = \frac{\partial U(C, A)}{\partial C} dC + \frac{\partial U(C, A)}{\partial A} dA \equiv UMa_C dC + UMa_A dA$$

L'equazione precedente indica che una quantità aggiuntiva infinitesimale ( $UMa_C$ ), moltiplicata per la variazione di  $C$  ( $dC$ ) sommata all'utilità aggiuntiva infinitesimale ( $UMa_A$ ), moltiplicata per la variazione di  $A$  ( $dA$ ), deve dare come risultato zero. Infatti, nell'equazione [3.11] abbiamo posto  $d\bar{U} = 0$  perché manteniamo costante l'utilità per far sì che il consumatore possa restare sulla stessa curva d'indifferenza. Manipolando i dati dell'espressione [3.11], si ha che:

$$\frac{dC}{dA} = - \frac{UMa_A}{UMa_C}$$

La pendenza della curva d'indifferenza è pari all'opposto del rapporto fra le utilità marginali. Il problema della scelta ottima del consumatore, per quanto visto sin qui, può essere calcolato ponendo a sistema la condizione di uguaglianza fra il SMS e il rapporto tra i prezzi  $-p_C/p_A$  con il vincolo di bilancio. In formula:

$$\begin{cases} |SMS| = \left| -\frac{p_C}{p_A} \right| \\ p_C C + p_A A = R \end{cases}$$

Ricordando che il SMS è pari al rapporto tra le utilità marginali dei due beni il sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \left| \frac{UMa_C}{UMa_A} \right| = \left| -\frac{p_C}{p_A} \right| \\ p_C C + p_A A = R \end{cases}$$