

Sezione Quinta

Scelta ottima

Esercizio n. 5.1

Determinare la scelta ottima del consumatore data la funzione di utilità:

$$[1.1] \quad U = x_1 x_2$$

dove x_1 e x_2 sono rispettivamente la quantità del bene 1 e del bene 2 acquistate dal consumatore. Si supponga, inoltre, che il reddito sia $m = 5$, il prezzo del bene 1 sia $p_1 = 2$ e del bene 2 sia invece $p_2 = 3$.

Risoluzione

Qui di seguito proponiamo diverse metodologie per la risoluzione di questo «classico» problema:

a) 1° procedimento (**per via algebrica**)

Scriviamo l'equazione della retta di bilancio nella sua forma generica

$$[1.2] \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

Inseriamo nell'espressione [1.2] i dati a nostra disposizione:

$$[1.3] \quad 2x_1 + 3x_2 = 5.$$

Conviene, adesso, esplicitare l'equazione [1.3] rispetto ad x_2

$$3x_2 = 5 - 2x_1$$

$$x_2 = \frac{5 - 2x_1}{3}; \quad x_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1.$$

Possiamo facilmente osservare due elementi caratteristici dell'equazione, ossia il **termine noto** ($5/3 = 1,66$) che fornisce il valore dell'intercetta della retta sull'asse delle x_2 ed il **coefficiente angolare** della retta ($-2/3$) che misura l'inclinazione della retta.

In pratica, il coefficiente angolare non è altro che il rapporto tra i prezzi dei due beni considerati, mentre il termine noto è pari al rapporto m/p_2 .

Per tracciare il grafico della retta di bilancio è necessario calcolare anche l'intercetta sull'asse delle x_1 . A tale scopo basta porre:

$$[1.4] \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$2x_1 + 3 \cdot 0 = 5 \quad \rightarrow \quad 2x_1 = 5 \quad \rightarrow \quad x_1 = 5/2 = 2,5$$

In pratica, ciò significa che se il consumatore destinasse tutto il suo reddito per l'acquisto del *bene 1* la quantità massima acquistabile sarebbe $x_1 = 2,5$.

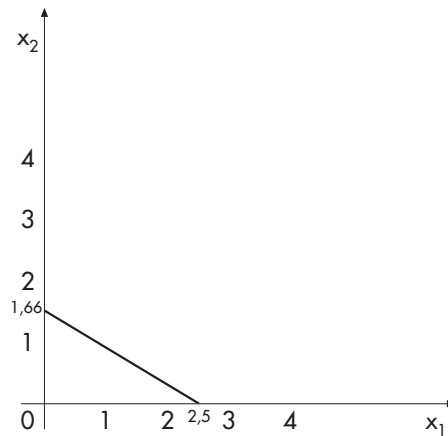


Figura 1

Pertanto la congiungente le due intercette $x_1 = 2,5$ e $x_2 = 1,66$ rappresenta graficamente la retta di bilancio (vedi Figura 1).

Le coordinate del punto di massimo della funzione di utilità $U = x_1 x_2$ si ottengono in corrispondenza del punto di tangenza fra la curva della funzione di utilità e la retta $2x_1 + 3x_2 = 5$ (condizione necessaria ma non sufficiente).

Impostando e risolvendo il sistema fra le due funzioni:

$$[1.5] \quad \begin{cases} U = x_1 x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \quad [1.6] \quad \begin{cases} x_2 = \frac{U}{x_1} \\ 3x_2 = 5 - 2x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{U}{x_1} \\ x_2 = \frac{5 - 2x_1}{3} \end{cases}$$

Essendo uguali i primi membri delle equazioni, lo saranno anche i secondi, per cui potremo scrivere:

$$[1.7] \quad \frac{U}{x_1} = \frac{5 - 2x_1}{3}$$

e svolgendo si avrà

$$3U = x_1 (5 - 2x_1)$$

$$3U = 5x_1 - 2x_1^2$$

$$2x_1^2 - 5x_1 + 3U = 0.$$

Risolviendo l'equazione si avrà:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - [4 (2) (3U)] = 25 - 24U.$$

Affinché si abbia tangenza fra la retta e la curva occorre imporre la condizione

$$\Delta = 0.$$

Quindi sarà:

$$25 - 24U = 0 \quad \rightarrow \quad 25 = 24U \quad \rightarrow \quad U = \frac{25}{24}$$

Sostituendo il valore $U = 25/24$ nell'espressione [1.7], si avrà:

$$\frac{\frac{25}{24}}{x_1} = \frac{5 - 2x_1}{3}$$

$$\frac{25}{24} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{5 - 2x_1}{3}$$

$$\frac{25}{24x_1} = \frac{5 - 2x_1}{3}$$

$$25 = 8x_1 (5 - 2x_1)$$

$$25 = 40x_1 - 16x_1^2$$

$$16x_1^2 - 40x_1 + 25 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1600 - 4(16 \cdot 25) = 1600 - 1600 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{40 \pm 0}{2 \cdot 16} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}$$

Sostituendo il valore $x_1 = 5/4$ nella [1.6] si avrà:

$$x_2 = \frac{U}{x_1} = \frac{\frac{25}{24}}{\frac{5}{4}} = \frac{25}{24} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$$

Il punto di tangenza fra la retta di bilancio e la curva d'indifferenza ha coordinate

$$w^* \left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6} \right)$$

La scelta ottima del consumatore (vedi figura 2) considerato il suo vincolo di bilancio è

$$x_1^* = \frac{5}{4} = 1,25; \quad x_2^* = \frac{5}{6} = 0,83$$

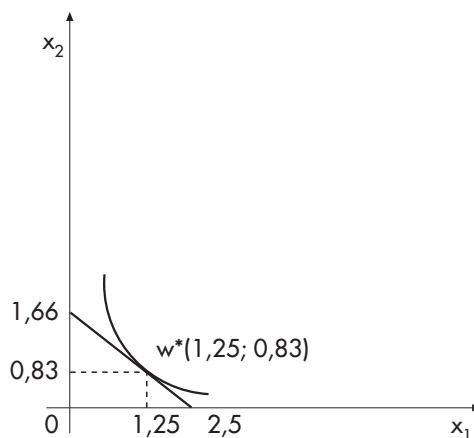


Figura 2

b) 2° procedimento (**metodo di sostituzione**)

$$U = x_1 x_2 \quad \rightarrow \quad \text{funzione di utilità}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 5 \rightarrow \text{vincolo di bilancio}$$

Esplicitiamo il vincolo di bilancio rispetto ad x_2 , ossia:

$$\begin{aligned} [1.8] \quad 3x_2 &= 5 - 2x_1 \\ x_2 &= \frac{5 - 2x_1}{3}. \end{aligned}$$

il valore x_2 trovato va inserito nella funzione di utilità [1.1]; si avrà, pertanto:

$$[1.9] \quad U = x_1 \left(\frac{5 - 2x_1}{3} \right) \rightarrow U = \frac{5x_1 - 2x_1^2}{3}.$$

Calcoliamo la derivata della funzione di utilità, ovvero l'espressione [1.9]:

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{5 - 2 \cdot 2x_1}{3} = \frac{5 - 4x_1}{3}.$$

Poniamo la condizione del primo ordine:

$$\frac{5 - 4x_1}{3} = 0$$

e risolvendo, si ottiene:

$$5 - 4x_1 = 0$$

$$5 = 4x_1$$

$$x_1 = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ questo valore va sostituito nella [1.8] per ottenere:}$$

$$x_2 = \frac{5 - 2 \cdot \frac{5}{4}}{3}$$

$$x_2 = \frac{10 - 5}{3}$$

$$x_2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = 0,83.$$

Per verificare se i valori di x_1 e x_2 (ossia il paniere w) costituiscono punti di massimo o minimo occorre calcolare la derivata seconda della funzione di utilità:

$$U = \frac{5 - 4x_1}{3}$$

e verificare il segno (condizione del secondo ordine)

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{0 - 4}{3} = -\frac{4}{3} < 0.$$

Poiché il segno della derivata è negativo, si può concludere che w ($1,25; 0,83$) rappresenta il punto massimo vincolato.

Pertanto w^* ($1,25; 0,83$) viene anche detto paniere ottimo o scelta ottima del consumatore.

- c) 3° procedimento (**imposizione dell'uguaglianza fra il saggio marginale di sostituzione MRS ed il rapporto fra i prezzi p_1/p_2**).

Questa metodologia risolutiva si avvale del concetto di MRS (saggio marginale di sostituzione ovvero *Marginal Rate of Substitution*).

Il MRS tra il *bene 2* ed il *bene 1*, misura il rapporto tra la variazione marginale del *bene 2*, ossia x_2 e la variazione marginale del *bene 1*, ossia x_1 , quando il consumatore si sposta lungo la stessa curva d'indifferenza. Il MRS è dato dal rapporto tra l'utilità marginale del *bene 1* e l'utilità marginale del *bene 2*.

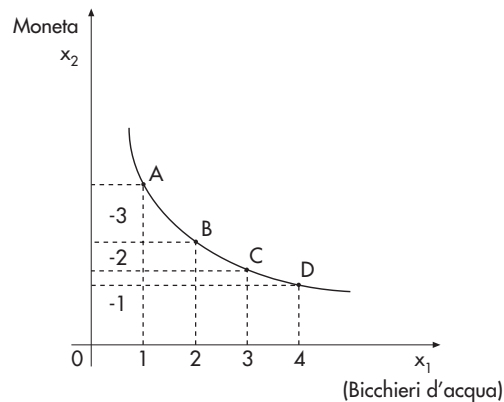


Figura 3

Dal grafico 3 si può osservare che il consumatore per acquisire un'unità aggiuntiva del *bene 1* (quindi per passare da A a B) è disposto a cedere 3 unità del *bene 2*.

Per acquisire un'ulteriore unità del *bene 1* (cioè per passare da *B* a *C*) è disposto a cedere due unità del *bene 2* e, per passare da *C* a *D* è disposto a cederne una sola. In generale la quantità di soddisfazione addizionale che un consumatore trae da un maggior consumo di un bene cresce al crescere del consumo del bene stesso (legge dell'utilità marginale decrescente). Conseguentemente le curve d'indifferenza sono convesse.

È evidente che il consumatore che desidera un altro bicchiere d'acqua passa dalla posizione *A* alla posizione *B* della curva essendo disposto a diminuire il suo reddito di 3 monete.

Nel passare da *B* a *C*, la sete è stata parzialmente soddisfatta ed egli è disposto ad acquistare un ulteriore bicchiere d'acqua rinunciando a sole 2 monete.

Per un ulteriore bicchiere d'acqua, che lo porterebbe nel punto *D* della curva della sete, il consumatore è disposto a cedere non più di una sola moneta in quanto ormai la sua sete è quasi totalmente soddisfatta.

La variazione da *A* a *B* è una variazione marginale (**infinitesima**). Pertanto il MRS si ottiene dal rapporto fra le utilità marginali.

$$[1.10] \quad MRS = - \frac{\frac{dU}{dx_1}}{\frac{dU}{dx_2}}$$

$$\frac{dU}{dx_1} = x_2; \quad \frac{dU}{dx_2} = x_1$$

$$MRS = - \frac{x_2}{x_1}.$$

In corrispondenza del paniere ottimo (o della scelta ottima) il MRS tra x_2 ed x_1 è uguale al rapporto tra i prezzi dei due beni.

Il paniere ottimo del consumo può essere calcolato ponendo a sistema la condizione di uguaglianza fra (MRS) e rapporto fra i prezzi $-p_1/p_2$ con il vincolo di bilancio. Il segno negativo del coefficiente angolare risulta evidente nelle forma esplicita della retta:

$$x_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1.$$

Essendo entrambi negativi saranno considerati in valore assoluto.

$$[1.11] \quad \begin{cases} |MRS| = \left| -\frac{p_1}{p_2} \right| \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici si avrà

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

$$[1.12] \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2x_1}{3} \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

$$2x_1 + 3 \cdot \frac{2x_1}{3} = 5$$

$$2x_1 + 2x_1 = 5$$

$$4x_1 = 5$$

$$x_1 = \frac{5}{4}$$

questo valore inserito nella [1.12] darà

$$x_2 = \frac{2 \cdot \frac{5}{4}}{3} = \frac{5}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Pertanto, il paniere ottimo sarà composto dalle seguenti quantità:

$$\mathbf{w}^* \left(\frac{5}{4} = 1,25; \frac{5}{6} = 0,83 \right)$$

d) 4° procedimento

La funzione di utilità di tipo Cobb-Douglas si presenta nella forma:

$$[1.13] \quad U = x_1^c \cdot x_2^d$$

Possiamo utilizzare le seguenti formule risolutive abbreviate che permettono di ottenere le quantità ottime di ciascun bene componente il paniere:

$$[1.14] \quad x_1^* = \frac{c}{c+d} \cdot \frac{m}{p_1}$$

$$[1.15] \quad x_2^* = \frac{d}{c+d} \cdot \frac{m}{p_2}$$

Nel caso in esame i dati sono $c = 1$; $d = 1$; $m = 5$; $p_1 = 2$; $p_2 = 3$.

Sostituendo nelle [1.14] e [1.15] i dati del problema si avrà:

$$x_1^* = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$x_2^* = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

Quindi il paniere ottimo (o la scelta ottima) è $w^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$

e) 5° procedimento (massimizzazione della funzione $U = x_1 x_2$ mediante il moltiplicatore di Lagrange).

Adoperando il moltiplicatore di Lagrange «L», la funzione di utilità viene espressa mediante la relazione:

$$[1.16] \quad F(x_1; x_2; L)$$

Il vincolo di bilancio è

$$2x_1 + 3x_2 = 5 \quad \text{ossia}$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5 = 0.$$

Quindi:

$$F(x_1; x_2; L) = x_1 x_2 + L(2x_1 + 3x_2 - 5)$$

$$F(x_1; x_2; L) = x_1 x_2 + 2x_1 L + 3x_2 L - 5L.$$

Calcoliamo le derivate parziali ed imponiamo la condizione del primo ordine:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + 2L = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + 3L = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0.$$

Impostiamo e risolviamo il sistema in tre equazioni e tre incognite:

$$\begin{cases} x_2 + 2L = 0 \\ x_1 + 3L = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava il valore:

$$[1.17] \quad x_2 = -2L$$

che va sostituito nella terza equazione, quindi:

$$\begin{cases} x_1 + 3L = 0 \\ 2x_1 + 3(-2L) - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3L = 0 \\ 2x_1 - 6L - 5 = 0 \end{cases}$$

Esplicitando la prima equazione del sistema rispetto a x_1 , si avrà:

$$[1.18] \quad x_1 = -3L$$

sostituendo il valore di x_1 , nella seconda equazione si avrà:

$$2(-3L) - 6L - 5 = 0$$

da cui:

$$-12L = 5$$

e quindi:

$$L = -\frac{5}{12}.$$

Il valore di L così trovato inserito nelle espressioni [1.17] e [1.18] fornisce il valore di x_1 e x_2 :

$$x_1 = -3\left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{4};$$

$$x_2 = -2\left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{6}.$$