per cui:

$$D = \frac{2C_0 + (E - U)}{E + U}$$

I rapporti di durata esprimono la **durata media** di permanenza delle unità statistiche che rappresentano il rinnovamento periodico della popolazione.

Sono il reciproco dei rapporti di ripetizione.

Rapporti di ripetizione

Sono rapporti statistici che si ottengono dividendo il flusso di rinnovo (supponendo uguali i flussi di entrata e di uscita) di un dato fenomeno per la sua consistenza media.

Esprimono il **numero di volte** in cui il fenomeno si rinnova nella dimensione temporale stabilita.

Sono il reciproco dei rapporti di durata.

Tassi

In statistica, un tasso indica il rapporto ovvero il confronto tra due grandezze omogenee, finalizzato alla stima della struttura e dell'andamento del fenomeno in esame.

Tasso di natalità

È il quoziente utilizzato per deteminare la **natalità** di una popolazione. L'indicatore più utilizzato è quello generico, dato dal rapporto tra il numero dei nati vivi di una nazione in un determinato periodo di tempo (generalmente un anno) e l'ammontare della popolazione di quel periodo. È generalmente espresso in millesimi.

Indicando con N_x il numero totale di nati vivi nell'anno x, con P_x la popolazione totale nell'anno x e con n_x il tasso di natalità relativo allo stesso anno, si ha:

$$n_x = \frac{N_x}{P_x}$$

Un tasso di natalità specifico è rappresentato dal *tasso di fecondità*.

Tasso di mortalità

È il quoziente utilizzato per deteminare la **mortalità** di una popolazione. Si ottiene rapportando il numero totale dei morti in un determinato periodo di tempo (generalmente un anno) alla popolazione totale esistente in quello stesso periodo.

Indicando con M_x il numero totale dei morti nell'anno x, con P_x la popolazione totale nell'anno x e con m_x il tasso di mortalità relativo a quell'anno, si ha:

$$m_x = \frac{M_x}{P_x}$$

Il tasso di mortalità può essere calcolato anche in relazione a determinate età: in tal caso esso si ottiene rapportando il numero dei morti a una certà età alla popolazione viva di quella stessa età.

Esercizio 3.1.1

La tabella seguente riporta la distribuzione di 1.000 soggetti classificati in base all'età e all'uso abituale di sostanze stupefacenti:

Classi di età	Consumatore	Non consumatore	Totale
15 - 20	15	36	51
21 - 30	16	131	147
31 - 40	19	250	269
41 - 50	23	382	405
50 e oltre	38	90	128
Totale	111	889	1.000

Tabella 1

Determinare:

a) la percentuale di soggetti di età compresa tra 41 e 50 anni;
b) la percentuale di soggetti di età compresa tra 21 e 50 anni consumatori di sostanze stupefacenti rispetto al totale dei consumatori;
c) l'incidenza percentuale dei non consumatori di sostanze stupefacenti di età compresa tra 31 e 50 anni sul totale dei soggetti di quella fascia di età.

Risoluzione

Le risposte sono rapporti di composizione. La difficoltà sta nell'individuare esattamente (nella tabella a doppia entrata) i numeratori e i denominatori dei rapporti.

a) La percentuale di soggetti di età compresa tra 41 e 50 anni è:

$$R_C = \frac{405}{1.000} \cdot 100 = 40,5\%$$

dove 405 si individua nell'ultima colonna, nella cella in corrispondenza della classe 41-50, come somma di 23 (soggetti di età compresa nella classe *Consumatori di sostanze stupefacenti*) e 382 (soggetti di età compresa nella classe *Non consumatori di sostanze stupefacenti*); mentre 1.000 è il numero totale dei soggetti.

b) La percentuale di soggetti di età compresa tra 21 e 50 anni consumatori di sostanze stupefacenti rispetto al totale dei consumatori è:

$$R_C = \frac{16 + 19 + 23}{111} \cdot 100 = \frac{58}{111} \cdot 100 = 52,25\%$$

dove 16, 19 e 23 sono i soggetti di età compresa, rispettivamente, tra 21 e 30 anni, 31 e 40 anni, 41 e 50 anni, consumatori di sostanze stupefacenti, e 111 è il numero totale di soggetti consumatori di sostanze stupefacenti.

c) L'incidenza percentuale dei consumatori di sostanze stupefacenti di età compresa tra 31 e 50 anni sul totale dei soggetti di quella fascia di età, è:

$$R_C = \frac{250 + 382}{269 + 405} \cdot 100 = 93,77\%$$

dove 250 e 382 sono i soggetti non consumatori di sostanze stupefacenti di età compresa, rispettivamente, tra 31 e 40 anni e 41 e 50 anni; mentre, 269 e 405 sono i soggetti totali di età compresa, rispettivamente, tra 31 e 40 anni e 41 e 50 anni.

Esercizio 3.1.2

Determinare l'incremento relativo percentuale di un fenomeno che, dal tempo 0 al tempo 1, passa da un valore di 50 a un valore di 100.

Risoluzione

Il fenomeno passa da un valore iniziale di 50 ad un valore di 100, per cui l'*incremento assoluto* è stato di 100 – 50 = 50; l'*incremento relativo* è stato di:

$$\frac{100-50}{50}=1$$

moltiplicando tale incremento relativo per 100 si ottiene l'*incremento relativo percentuale*. Il fenomeno ha avuto, quindi, un incremento relativo percentuale del 100%.

Esercizio 3.1.3

Determinare il decremento relativo percentuale di un fenomeno che, dal tempo 0 al tempo 1, passa da un valore di 2 a un valore di 1.

Risoluzione

Il decremento relativo percentuale si ottiene rapportando la differenza tra i valori assunti dal fenomeno nei due tempi al valore assunto dal fenomeno nel tempo 0, ed esprimendo tale rapporto in termini percentuali; esso è dato da:

$$\frac{1-2}{2}=-0,5$$

che, moltiplicato per 100, è uguale a un decremento del 50%.

Esercizio 3.1.4

La tabella seguente riporta i dati sulla dinamica del mercato del lavoro in tre trimestri:

	III trimestre 2005	**II trimestre 2006**	**III trimestre 2006**
Occupati	22.542	23.187	23.001
In cerca di occupazione	1.726	1.621	1.489
Forze di lavoro	*24.268*	*24.808*	*24.490*
Occupati in agricoltura	994	979	1.018
Occupati nell'industria	6.958	6.913	6.942
Occupati nei servizi	14.591	15.294	15.040
Occupati dipendenti	16.604	17.015	16.992
Occupati indipendenti	5.938	6.172	6.009

Tabella 2 - Fonte: ISTAT

Determinare le variazioni assolute e percentuali:

a) tra il III trimestre 2006 e il III trimestre 2005;
b) tra il III trimestre 2006 e il II trimestre 2006.

Risoluzione

In realtà, tali variazioni sono calcolate sia dallo stesso Istituto di Statistica sia da altri enti pubblici o privati a fini propri. In questo testo ce ne occupiamo a fini puramente esercitativi.

A tal proposito premettiamo che:

1. le variazioni assolute si ottengono dalle differenze tra le frequenze del III trimestre 2006 e le corrispondenti frequenze del III trimestre 2005 (punto a)) o del II trimestre 2006 (punto b));
2. le variazioni percentuali si ottengono rapportando le variazioni assolute ottenute secondo il metodo illustrato al punto precedente alle corrispondenti frequenze del III trimestre 2005 (punto a) o del II trimestre 2006 (punto b), e moltiplicando tali rapporti per 100.

A titolo esemplificativo illustreremo solo alcune variazioni, le restanti saranno indicate in schemi di calcolo.

a) Nell'anno considerato, le variazioni assolute si ottengono sottraendo ai dati riportati nell'ultima colonna della tabella i corrispondenti dati riportati nella seconda colonna.

La variazione assoluta:

— negli occupati è pari a:

$$23.001 - 22.542 = 459$$

— nelle persone in cerca di occupazione è pari a:

$$1.489 - 1726 = - 237$$

si registra, cioè, un decremento assoluto;

— nelle forze di lavoro è pari a:

$$24.490 - 24.268 = 222$$

…

— negli occupati indipendenti è pari a:

$$6.009 - 5.938 = 71$$

e così via.

Nell'anno considerato, le variazioni percentuali si ottengono rapportando le variazioni assolute in tal modo ottenute ai corrispondenti valori riportati nella seconda colonna della tabella, e moltiplicando tali rapporti per 100.

La variazione percentuale:

— negli occupati è pari a:

$$\frac{459}{22.542} \cdot 100 = 2,036\%$$

— nelle persone in cerca di occupazione è pari a:

$$\frac{-237}{1.726} \cdot 100 = -13,731\%$$

— nelle forze di lavoro è pari a:

$$\frac{222}{24.268} \cdot 100 = 0,915\%$$

…

— negli occupati indipendenti è pari a:

$$\frac{71}{5.938} \cdot 100 = 1,196\%$$

I dati relativi alle due tipologie di variazione sono riportati nel seguente schema di calcolo:

	Variazioni assolute III trim. 2006 / III trim. 2005	**Variazioni percentuali III trim. 2006 / III trim. 2005**
Occupati	459	2,036
In cerca di occupazione	–237	–13,731
Forze di lavoro	*222*	*0,915*
Occupati in agricoltura	24	2,414
Occupati nell'industria	–16	–0,230
Occupati nei servizi	449	3,077
Occupati dipendenti	388	2,337
Occupati indipendenti	71	1,196

Schema di calcolo 1

b) Nel trimestre considerato, le variazioni assolute si ottengono sottraendo ai dati riportati nell'ultima colonna della tabella i corrispondenti dati riportati nella terza colonna.

La variazione assoluta:

— negli occupati è pari a:

$$23.001 - 23.187 = -186$$

si registra, cioè, un decremento assoluto;

— nelle persone in cerca di occupazione è pari a:

$$1.489 - 1.621 = -132$$

— nelle forze di lavoro è pari a:

$$24.490 - 24.808 = -318$$

…

— negli occupati indipendenti è pari a:

$$6.009 - 6.172 = -163$$

Nel trimestre considerato, le variazioni percentuali si ottengono rapportando le variazioni assolute in tal modo ottenute ai corrispondenti valori riportati nella terza colonna della tabella, e moltiplicando tali rapporti per 100.

La variazione percentuale:

— negli occupati è pari a:

$$\frac{-186}{23.187} \cdot 100 = -0,802\%$$

— nelle persone in cerca di occupazione è pari a:

$$\frac{-132}{1.621} \cdot 100 = -8,143\%$$

— nelle forze di lavoro è pari a:

$$\frac{-318}{24.808} \cdot 100 = -1,282\%$$

…

— negli occupati indipendenti è pari a:

$$\frac{-163}{6.172} \cdot 100 = -2,641\%$$

I dati relativi alle due tipologie di variazione sono riportati nel seguente schema di calcolo:

	Variazioni assolute III trim. 2006 / II trim. 2006	**Variazioni percentuali III trim. 2006 / II trim. 2006**
Occupati	–186	–0,802
In cerca di occupazione	–132	–8,143
Forze di lavoro	*–318*	*–1,282*
Occupati in agricoltura	39	3,984
Occupati nell'industria	29	0,419
Occupati nei servizi	–254	–1,611
Occupati dipendenti	–23	–0,135
Occupati indipendenti	–163	–2,641

Schema di calcolo 2

Esercizio 3.1.5

La tabella seguente riporta la popolazione residente e la superficie territoriale (in kmq) per ripartizioni geografiche, al 31 dicembre 2004.

Ripartizioni geografiche	**Popolazione**	**Superficie**
Nord	26.469.091	119.919,54
Centro	11.245.959	58.353,71
Mezzogiorno	20.747.325	123.063,51
Italia	58.462.375	301.336,76

Tabella 3: Fonte: ISTAT

Determinare i rapporti di densità.

Risoluzione

I rapporti di densità si ottengono dal quoziente tra la popolazione e la superficie, e sono riportati nello schema seguente:

Ripartizioni geografiche	**Popolazione**
Nord	220,72
Centro	192,72
Mezzogiorno	168,59
Italia	194,01

Schema di calcolo 3

Dallo schema si evince che il Nord ha una densità maggiore di quella media italiana.

Esercizio 3.1.6

La tabella seguente illustra, relativamente agli anni dal 2003 al 2009, i tassi di ingresso e di uscita di dipendenti per 1.000 occupati in una data industria:

Anni	Tassi di ingresso	Tassi di uscita
2003	88	101
2004	93	99
2005	104	115
2006	106	117
2007	79	84
2008	84	93
2009	92	89

Tabella 4

Determinare un indice della rotazione dell'occupazione nell'industria per ciascun anno e la durata media del rapporto di lavoro per ciascun anno.

Risoluzione

L'indice di rotazione dell'occupazione nell'industria è rappresentato dal rapporto di ripetizione per ciascun anno, in cui, essendo i dati espressi per 1.000 occupati, 1.000 è la consistenza media per la quale va divisa la semisomma del tasso di ingresso e di uscita per ciascun anno; da cui:

$$R = \frac{(E+U)/2}{\left[2C_0 + (E-U)\right]/2} = \frac{(E+U)/2}{1.000}$$

La durata media per ciascun anno è data dal reciproco del rapporto di ripetizione per il medesimo anno.

I risultati dei calcoli sono riportati nello schema seguente:

Anni	Rapporti di ripetizione	Rapporti di durata
2003	0,095	10,582
2004	0,096	10,417
2005	0,110	9,132
2006	0,112	8,969
2007	0,082	12,270
2008	0,089	11,299
2009	0,091	11,050

Schema di calcolo 4

Dalla tabella si evince che nel 2003 si è verificata una rotazione della manodopera pari al 9,5% degli occupati. Inoltre, il reciproco del rapporto di ripetizione, il rapporto di durata, indica che ciascun dipendente rimane in media nella collettività per un tempo superiore a 10 anni.

Per tutti gli anni considerati l'entità dei flussi è più piccola di quella riferita alla collettività, per cui i rapporti di durata forniscono dei risultati che si riferiscono ad una situazione futura. Pertanto un dipendente assunto nel 2009 resta nell'industria per più di 11 anni, si prevede, cioè, l'uscita nel 2020.

Esercizio 3.1.7

La tabella seguente riporta i dati sul movimento naturale della popolazione e sulla popolazione a inizio e fine anno 2004, per ripartizione geografica:

Movimento naturale	Nord-ovest	Nord-est	Centro	Sud	Isole	Italia
Nati vivi	143.502	106.175	104.740	143.330	64.852	562.599
Morti	150.517	108.889	112.846	116.291	58.115	546.658
Saldo	*–7.015*	*–2.714*	*–8.106*	*27.039*	*6.737*	*15.941*
Popolazione a inizio anno	15.216.525	10.884.029	11.124.059	14.017.274	6.646.358	57.888.245
Popolazione a fine anno	15.438.441	11.030.650	11.245.959	14.084.192	6.663.133	58.462.375

Tabella 5 - Fonte: ISTAT

Determinare, per le diverse ripartizioni geografiche:

a) i tassi di natalità
b) i tassi di mortalità.

Risoluzione

Prima di passare alla determinazione dei tassi di natalità e di mortalità, bisogna premettere che i denominatori dei rapporti saranno costituiti dalla popolazione media dell'anno, ossia dalla semisomma tra popolazione a inizio anno e popolazione a fine anno.

Essa, per le diverse ripartizioni geografiche, è pari a:

	Nord-ovest	Nord-est	Centro	Sud	Isole	Italia
Popolazione media	15.327.483	10.957.340	11.185.009	14.050.733	6.654.746	58.175.310

Schema di calcolo 5

a) I tassi di natalità si ottengono dal rapporto tra nati vivi nell'anno e popolazione media dell'anno stesso. Tali rapporti sono moltiplicati per 1.000.

	Nord-ovest	Nord-est	Centro	Sud	Isole	Italia
Tassi di natalità	9,36	9,69	9,36	10,20	9,75	9,67

Schema di calcolo 6

Dallo schema si evince che in Italia ogni 1.000 abitanti nel 2004 ne sono nati 9,67 (da chi è rappresentato quello 0,67?); analogo discorso può farsi per le diverse ripartizioni geografiche, per le quali si nota che il più alto tasso di natalità appartiene al Sud.

b) I tassi di mortalità si ottengono dal rapporto tra morti nell'anno e popolazione media dell'anno stesso. Tali rapporti sono moltiplicati per 1.000.

	Nord-ovest	Nord-est	Centro	Sud	Isole	Italia
Tassi di natalità	9,82	9,94	10,09	8,28	8,73	9,40

Schema di calcolo 7

Dallo schema si evince che in Italia ogni 1.000 abitanti nel 2004 ne sono morti 9,40; il più alto tasso di mortalità si rinviene al Centro ed è pari a 10,09 decessi ogni 1.000 abitanti.

Sezione Seconda
I numeri indice

Indice

L'**indice**, detto anche **numero indice**, è un rapporto statistico che permette di confrontare le intensità di un fenomeno in situazioni temporali e/o spaziali differenti. Si costruisce ponendo al denominatore un'intensità (detta base) della stessa natura del fenomeno che è al numeratore. Si distinguono *numeri indice a base fissa*, se il periodo di riferimento è costante al variare del tempo, e *numeri indice concatenati* (o *a base mobile*) se, invece, per ciascuno di essi si fa riferimento al periodo precedente. I *numeri indice semplici* sono costituiti dal rapporto fra singole grandezze economiche riferite a beni omogenei, mentre i *numeri indice ponderati* (composti, sintetici) sono costituiti dal rapporto fra medie di grandezze economiche eterogenee. Grande importanza e diffusione per l'analisi economica hanno i numeri indice dei prezzi, tra i quali: l'indice dei prezzi di Fisher, di Laspeyres, di Paasche.

Indice dei prezzi di Laspeyres

È un indice composto dei prezzi; è espresso dal rapporto tra le medie di prezzi di m beni (o servizi) diversi calcolati nei due periodi 0 e n, ponderati con le quantità al tempo 0.

La sua espressione analitica è la seguente:

$$ {}_0I_n^L = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}\, q_{i,0}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0}\, q_{i,0}} $$

Per tale indice non varia nel tempo il paniere dei beni e servizi di riferimento, il che agevola di molto il calcolo ripetuto.

Indice dei prezzi di Paasche

È un indice composto dei prezzi; è espresso dal rapporto tra le medie di prezzi di m beni (o servizi) diversi calcolati nei due periodi 0 e n, ponderati con le quantità al tempo n.

La sua espressione analitica è la seguente:

$$ {}_0I_n^P = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}\, q_{i,n}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0}\, q_{i,n}} $$

Per tale indice muta costantemente il paniere dei beni e servizi di riferimento. Se ciò lo rende aggiornato e fedele, ne complica il calcolo per cui, solo nelle situazioni ove si dispone congiuntamente e simultaneamente di prezzi e quantità (come nelle contrattazioni borsistiche, per esempio), è conveniente utilizzare l'**indice di Paasche**.

Indice dei prezzi di Fisher

È un indice composto dei prezzi; è espresso dalla **media geometrica** (di cui ci occuperemo nel capitolo quarto) fra l'indice dei prezzi di Laspeyres e l'indice dei prezzi di Paasche.

La sua espressione analitica è la seguente:

$$ {}_0I_n^F = \sqrt{{}_0I_n^L \cdot {}_0I_n^P} $$

L'**indice di Fisher** è anche detto *numero indice ideale* poiché soddisfa molti requisiti formali, ma è raramente applicato perché richiede il calcolo preliminare di altri due numeri indice.

Esercizio 3.2.1

La serie storica seguente riporta la retribuzione annua in euro, dal 2004 al 2009, di un individuo:

Anno	Retribuzione annua
2004	17.166
2005	17.853
2006	18.818
2007	19.552
2008	19.884
2009	20.242

Tabella 6

a) Costruire la serie dei numeri indice a base mobile e commentarla;
b) trasformare la serie di numeri indice a base mobile nella corrispondente serie di numeri indice a base fissa al 2007.

Risoluzione

a) La serie dei numeri indice a base mobile è la seguente:

n	${}_{n-1}I_n$
2004	—
2005	1,040
2006	1,054
2007	1,039
2008	1,017
2009	1,018

Schema di calcolo 8

I diversi indici temporali sono ottenuti nel modo seguente:

$${}_{2004}I_{2005} = \frac{17.853}{17.166} = 1{,}040;$$

$${}_{2005}I_{2006} = \frac{18.818}{17.853} = 1{,}054;$$

$${}_{2006}I_{2007} = \frac{19.552}{18.818} = 1{,}039;$$

$${}_{2007}I_{2008} = \frac{19.884}{19.552} = 1{,}017;$$

$${}_{2008}I_{2009} = \frac{20.242}{19.884} = 1{,}018.$$

Essendo gli indici calcolati superiori all'unità, la serie evidenzia un continuo incremento relativo delle retribuzioni. Il maggiore incremento relativo si è verificato tra il 2005 e il 2006, infatti, esso è stato pari a:

$$\left({}_{2005}I_{2006} - 1\right) \cdot 100 = (1{,}054 - 1) \cdot 100 = 0{,}054 \cdot 100 = 5{,}4\%$$

Il minore incremento relativo si è verificato, invece, tra il 2007 e il 2008, infatti, esso è stato pari solo a:

$$\left({}_{2007}I_{2008} - 1\right) \cdot 100 = (1{,}017 - 1) \cdot 100 = 0{,}017 \cdot 100 = 1{,}7\%$$

b) La serie di numeri indice a base fissa al 2007 è riportata nell'ultima colonna dello schema seguente:

n	${}_{n-1}I_n$	${}_{2007}I_n$
2004	—	0,878
2005	1,040	0,913
2006	1,054	0,962
2007	1,039	1,000
2008	1,017	1,017
2009	1,018	1,035

Schema di calcolo 9

I diversi indici temporali sono ottenuti dalla prima serie nel modo seguente:

$${}_{2007}I_{2004} = \left({}_{2004}I_{2005} \cdot {}_{2005}I_{2006} \cdot {}_{2006}I_{2007}\right)^{-1} = (1{,}040 \cdot 1{,}054 \cdot 1{,}039)^{-1} = 0{,}878;$$

$${}_{2007}I_{2005} = \left({}_{2005}I_{2006} \cdot {}_{2006}I_{2007}\right)^{-1} = (1{,}054 \cdot 1{,}039)^{-1} = 0{,}913;$$

$${}_{2007}I_{2006} = \left({}_{2006}I_{2007}\right)^{-1} = (1{,}039)^{-1} = 0{,}962;$$

$${}_{2007}I_{2007} = 1;$$

$${}_{2007}I_{2008} = 1{,}017;$$

$${}_{2007}I_{2009} = {}_{2007}I_{2008} \cdot {}_{2008}I_{2009} = 1{,}017 \cdot 1{,}018 = 1{,}035.$$

Esercizio 3.2.2

La tabella seguente riporta i prezzi (in euro) di quattro prodotti venduti in un supermercato nei mesi di gennaio e dicembre 2009:

Tipo di prodotto	Gennaio		Dicembre	
	Prezzo in euro (al kg)	Quantità vendute (in kg)	Prezzo in euro (al kg)	Quantità vendute (in kg)
A	1,45	413	1,5	405
B	2,1	640	2,11	590
C	3	520	3,1	580
D	12	150	13	120

Tabella 7

Calcolare:

a) l'indice dei prezzi di Laspeyres;
b) l'indice dei prezzi di Paasche.

Risoluzione

a) Per il calcolo dell'indice dei prezzi di Laspeyres è sufficiente applicare la formula:

$$ {}_0I_n^{L,P} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n} q_{i,0}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0} q_{i,0}} $$

I prezzi a dicembre dei diversi prodotti erano:

$p_{1,n} = 1{,}5$ $p_{2,n} = 2{,}11$ $p_{3,n} = 3{,}1$ $p_{4,n} = 13$

Le quantità a gennaio dei diversi prodotti erano:

$q_{1,0} = 413$ $q_{2,0} = 640$ $q_{3,0} = 520$ $q_{4,0} = 150$

I prezzi a gennaio dei diversi prodotti erano:

$p_{1,0} = 1{,}45$ $p_{2,0} = 2{,}1$ $p_{3,0} = 3$ $p_{4,0} = 12$

quindi:

$$ {}_0I_n^{L,p} = \frac{1{,}5 \cdot 413 + 2{,}11 \cdot 640 + 3{,}1 \cdot 520 + 13 \cdot 150}{1{,}45 \cdot 413 + 2{,}1 \cdot 640 + 3 \cdot 520 + 12 \cdot 150} = 1{,}0432 $$

Da gennaio a dicembre i prezzi dei quattro prodotti sono aumentati del:

$$ (1{,}0432 - 1) \cdot 100 = 4{,}32\% $$

assumendo che le quantità siano rimaste quelle di gennaio.

b) Per il calcolo dell'indice dei prezzi di Paasche è sufficiente applicare la formula:

$$ {}_0I_n^{P,p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n} q_{i,n}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0} q_{i,n}} $$

Le quantità a dicembre dei diversi prodotti erano:

$q_{1,n} = 405$ $q_{2,n} = 590$ $q_{3,n} = 580$ $q_{4,n} = 120$

Quindi, applicando la formula:

$$ {}_0I_n^{P,p} = \frac{1{,}5 \cdot 405 + 2{,}11 \cdot 590 + 3{,}1 \cdot 580 + 13 \cdot 120}{1{,}45 \cdot 405 + 2{,}1 \cdot 590 + 3 \cdot 580 + 12 \cdot 120} = 1{,}0408 $$

Da gennaio a dicembre i prezzi dei quattro prodotti sono aumentati del:

$$ (1{,}0408 - 1) \cdot 100 = 4{,}08\% $$

assumendo che le quantità vendute siano quelle di dicembre.

I due indici (Laspeyres e Paasche) danno luogo ad un risultato diverso.

Esercizio 3.2.3

Con riferimento alla tabella 7, determinare:

a) l'indice delle quantità di Laspeyres;
b) l'indice delle quantità di Paasche.

Risoluzione

a) Per il calcolo dell'indice delle quantità di Laspeyres, in analogia alla formula dell'indice dei prezzi, si applica la formula:

$$ {}_0I_n^{L,q} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0} q_{i,n}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0} q_{i,0}} $$

in cui i pesi sono costituiti dai prezzi di gennaio.

Sono noti i prezzi a gennaio, le quantità a gennaio e le quantità a dicembre, per cui, l'indice delle quantità di Laspeyres è:

$$ {}_0I_n^{L,q} = \frac{1{,}45 \cdot 405 + 2{,}1 \cdot 590 + 3 \cdot 580 + 12 \cdot 120}{1{,}45 \cdot 413 + 2{,}1 \cdot 640 + 3 \cdot 520 + 12 \cdot 150} = 0{,}9441 $$

Da gennaio a dicembre la quantità venduta dei quattro prodotti è diminuita, infatti, la variazione è stata pari al $(0{,}9441 - 1) \cdot 100 = 5{,}59\%$, assumendo che i loro prezzi siano rimasti quelli di gennaio.

b) Per il calcolo dell'indice delle quantità di Paasche, in analogia alla formula dell'indice dei prezzi, si applica la formula:

$$ {}_0I_n^{P,q} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n} q_{i,n}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n} q_{i,0}} $$

in cui i pesi sono costituiti dai prezzi di dicembre.

Noti prezzi e quantità nei mesi di gennaio e di dicembre, l'indice delle quantità di Paasche è:

$$ {}_0I_n^{P,q} = \frac{1{,}5 \cdot 405 + 2{,}11 \cdot 590 + 3{,}1 \cdot 580 + 13 \cdot 120}{1{,}5 \cdot 413 + 2{,}11 \cdot 640 + 3{,}1 \cdot 520 + 13 \cdot 150} = 0{,}9419 $$

Da gennaio a dicembre la quantità venduta dei quattro prodotti è diminuita, infatti, la variazione è stata pari al $(0{,}9419 - 1) \cdot 100 = 5{,}81\%$, assumendo che i prezzi siano quelli di dicembre.

Esercizio 3.2.4

Con riferimento alla tabella 7, determinare:

a) l'indice dei prezzi di Fisher;
b) l'indice delle quantità di Fisher.

Risoluzione

a) Per il calcolo dell'indice dei prezzi di Fisher si applica la formula:

$$ {}_0I_n^{F,p} = \sqrt{{}_0I_n^{L,p} \cdot {}_0I_n^{P,p}} $$

Dall'esercizio 3.2.2 è noto che:

$$ {}_0I_n^{L,p} = 1{,}0432 $$

e

$$ {}_0I_n^{P,p} = 1{,}0408 $$

pertanto, l'indice dei prezzi di Fisher è:

$$ {}_0I_n^{F,p} = \sqrt{1{,}0432 \cdot 1{,}0408} = 1{,}0420 $$

b) Per il calcolo dell'indice delle quantità di Fisher si applica la formula:

$$ {}_0I_n^{F,q} = \sqrt{{}_0I_n^{L,q} \cdot {}_0I_n^{P,q}} $$

Dall'esercizio 3.2.3 è noto che:

$$ {}_0I_n^{L,q} = 0{,}9441 \qquad {}_0I_n^{P,q} = 0{,}9419 $$

pertanto, l'indice delle quantità di Fisher è:

$$ {}_0I_n^{F,q} = \sqrt{0{,}9441 \cdot 0{,}9149} = 0{,}9430 $$

Esercizio 3.2.5

Dimostrare che l'indice dei prezzi di Fisher soddisfa la proprietà di reversibilità delle basi.

Risoluzione

L'indice dei prezzi di Fisher è:

$$ {}_0I_n^{F,p} = \sqrt{{}_0I_n^{L,p} \cdot {}_0I_n^{P,p}} $$

cioè:

$$ {}_0I_n^{F,p} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}q_{i,0}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0}q_{i,0}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}q_{i,n}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0}q_{i,n}}} = \frac{1}{{}_nI_0^{F,p}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0}q_{i,n}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}q_{i,n}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{i,0}q_{i,0}}{\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}q_{i,0}}}} $$

La proprietà può essere dimostrata anche ricorrendo ai dati della tabella 7, infatti si ha:

$$ \sum_{i=1}^{m} p_{i,0}q_{i,n} = 1{,}45 \cdot 405 + 2{,}10 \cdot 590 + 3{,}00 \cdot 580 + 12{,}00 \cdot 120 = 5.006{,}25 $$

$$ \sum_{i=1}^{m} p_{i,0}q_{i,0} = 1{,}45 \cdot 413 + 2{,}10 \cdot 640 + 3{,}00 \cdot 520 + 12{,}00 \cdot 150 = 5.302{,}85 $$

$$ \sum_{i=1}^{m} p_{i,n}q_{i,n} = 1{,}50 \cdot 405 + 2{,}11 \cdot 590 + 3{,}10 \cdot 580 + 13{,}00 \cdot 120 = 5.210{,}40 $$

$$ \sum_{i=1}^{m} p_{i,n}q_{i,0} = 1{,}50 \cdot 413 + 2{,}11 \cdot 640 + 3{,}10 \cdot 520 + 13{,}00 \cdot 150 = 5.531{,}90 $$

Applicando la formula si ottiene lo stesso valore ottenuto nell'esercizio 3.2.4:

$$ {}_nI_0^{F,p} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5.006,25}{5.210,40} \cdot \frac{5.302,85}{5.531,90}}} = 1,0420 $$

Esercizio 3.2.6

Dati i seguenti prezzi in euro di un dato prodotto relativamente al periodo gennaio-agosto 2009:

Mesi	Prezzi
Gennaio	1,9
Febbraio	1,95
Marzo	1,985
Aprile	2
Maggio	2,05
Giugno	2,075
Luglio	2,115
Agosto	2,184

Tabella 8

a) determinare i numeri indice a base fissa considerando come base fissa il prezzo del mese di gennaio;
b) si passi dai numeri indice a base fissa a quelli a base variabile.

Risoluzione

a) Avendo scelto come base fissa il mese di gennaio, lo si pone uguale a 1. Gli altri indici a base fissa si calcolano dividendo ciascun prezzo per la base (in questo caso 1,9); per cui la serie dei numeri indice a base fissa *Gennaio* è la seguente:

Mesi	Prezzi
Gennaio	1,000
Febbraio	1,026
Marzo	1,045
Aprile	1,053
Maggio	1,079
Giugno	1,092
Luglio	1,113
Agosto	1,149

Schema di calcolo 10

in cui ogni indice è ottenuto in questo modo:

$$ {}_{GEN}I_{GEN} = 1; $$

$$ {}_{GEN}I_{FEB} = \frac{1,95}{1,9} = 1,026; $$

$$_{GEN}I_{MAR} = \frac{1,985}{1,9} = 1,045;$$

$$_{GEN}I_{APR} = \frac{2}{1,9} = 1,053;$$

$$_{GEN}I_{MAG} = \frac{2,05}{1,9} = 1,079;$$

$$_{GEN}I_{GIU} = \frac{2,075}{1,9} = 1,092;$$

$$_{GEN}I_{LUG} = \frac{2,115}{1,9} = 1,113;$$

$$_{GEN}I_{AGO} = \frac{2,184}{1,9} = 1,149.$$

b) Per passare agli indici a base mobile partendo dagli indici a base fissa è necessario dividere ciascun indice a base fissa per il suo precedente. La serie è la seguente:

n	$_{GEN}I_n$	$_{n-1}I_n$
Gennaio	1,000	—
Febbraio	1,026	1,026
Marzo	1,045	1,018
Aprile	1,053	1,008
Maggio	1,079	1,025
Giugno	1,092	1,012
Luglio	1,113	1,019
Agosto	1,149	1,032

Schema di calcolo 11

I diversi indici temporali sono ottenuti nel modo seguente:

$$_{GEN}I_{FEB} = \frac{1,026}{1} = 1,026;$$

$$_{FEB}I_{MAR} = \frac{1,045}{1,026} = 1,018;$$

$$_{MAR}I_{APR} = \frac{1,053}{1,045} = 1,008;$$

$$_{APR}I_{MAG} = \frac{1,079}{1,053} = 1,025;$$

$$_{MAG}I_{GIU} = \frac{1,092}{1,079} = 1,012;$$

$$_{GIU}I_{LUG} = \frac{1,113}{1,092} = 1,019;$$

$$_{LUG}I_{AGO} = \frac{1,149}{1,113} = 1,032.$$