

in cui  $\alpha_{\overline{n}|i}$  rappresenta la **rata di ammortamento del debito di un capitale unitario**. Si tratta di risolvere un'equazione lineare nell'incognita  $R$ .

**SIANO NOTI IL MONTANTE, IL TASSO E IL NUMERO DELLE RATE**

Dalla seconda delle (1.1) si ha che la rata  $R$  è data da:

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} \quad (2.3)$$

Anche i reciproci di  $s_{\overline{n}|i}$  sono tabulati nei prontuari e sono indicati con  $\sigma_{\overline{n}|i}$ , cioè:

$$\sigma_{\overline{n}|i} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$$

Pertanto, la (2.3), che consente di risolvere il problema della determinazione della rata costante posticipata  $R$  da versare per  $n$  anni per **costituire il capitale  $S$** , si scrive sotto la forma:

$$R = S\sigma_{\overline{n}|i} \quad (2.4)$$

in cui  $\sigma_{\overline{n}|i}$  rappresenta la **rata per la costituzione di un capitale unitario**. Anche in questo caso si tratta di risolvere un'equazione lineare nell'incognita  $R$ .

Con analoghi ragionamenti si può ricavare la rata  $R$  per qualsivoglia tipo di rendita fino ad ora esaminata.

A questo punto è interessante ricavare la relazione sussistente tra  $\alpha_{\overline{n}|i}$  e  $\sigma_{\overline{n}|i}$ ; essa si ottiene dalla differenza:

$$\alpha_{\overline{n}|i} - \sigma_{\overline{n}|i} = \frac{i}{1-v^n} - \frac{i}{r^n-1} = \frac{i}{1-v^n} - \frac{iv^n}{(r^n-1)v^n} = \frac{i}{1-v^n} - \frac{iv^n}{1-v^n} = \frac{i(1-v^n)}{1-v^n} = i$$

da cui:

$$\alpha_{\overline{n}|i} = \sigma_{\overline{n}|i} + i \quad (2.5)$$

**ESEMPIO 1**

*Calcolare la rata annua posticipata necessaria per costituire, in 11 anni al tasso del 5%, il capitale di 9.800 €.*

La rata si determina applicando la (2.4) al capitale di 9.800 € da costituire:

$$R = 9.800 \cdot \sigma_{\overline{11}|0,05}$$

Dalle tavole si evince che  $\sigma_{\overline{11}|0,05} = 0,07038889$ , per cui la rata di costituzione del capitale di 9.800 € è:

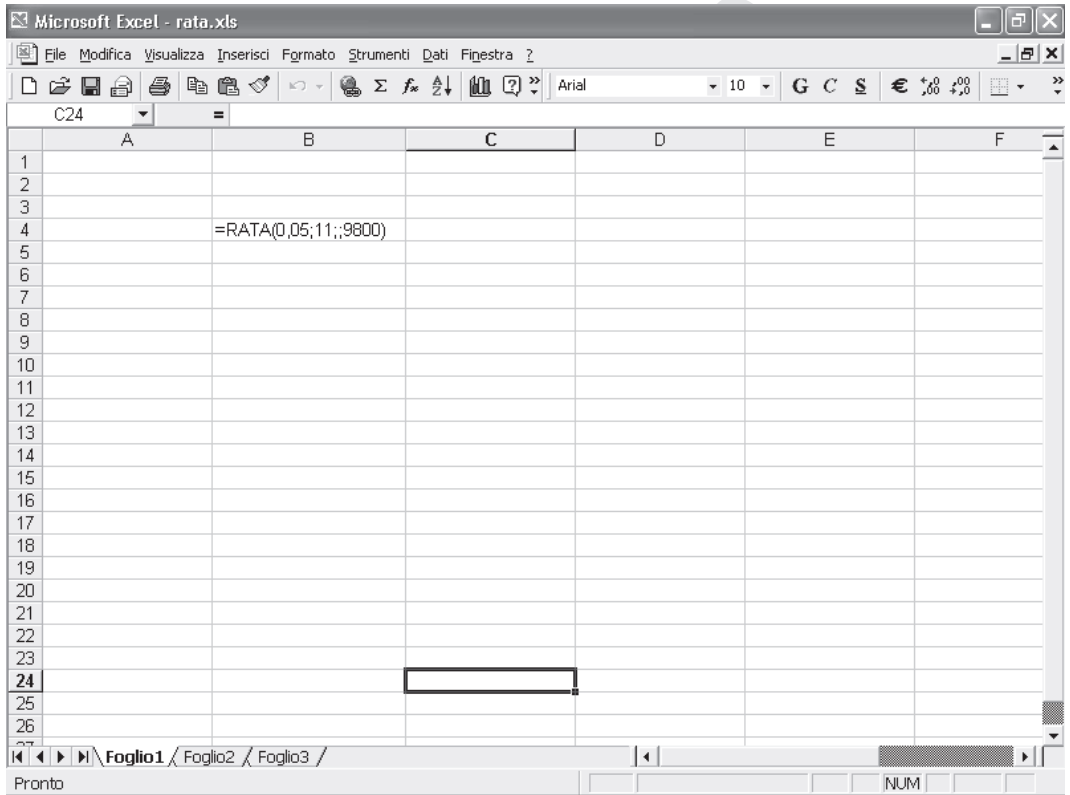
$$R = 9.800 \cdot 0,07038889 = 689,81$$

La funzione RATA di Excel consente di risolvere il problema della ricerca della rata di una rendita dati:

- il tasso d'interesse effettivo di periodo della rendita;
- il numero di rate della rendita;
- il valore attuale e/o il montante della rendita (uno dei due può anche essere omesso);
- la scadenza dei vari pagamenti: all'inizio o alla fine di ciascun periodo (quest'ultimo può anche essere omesso).

La sua sintassi è, infatti, **RATA(tasso\_int;periodi;val\_attuale;val\_futuro;tipo)**. Il valore che si ottiene ha segno negativo in quanto si tratta di un pagamento.

Il foglio elettronico relativo all'ESEMPIO 1 è illustrato di seguito.



**ESEMPIO 2**

Calcolare la rata di una rendita semestrale posticipata immediata di durata pari a 12 anni che ha valore attuale di 2.315,99 € a un tasso effettivo d'interesse del 5%.

Considerando l'espressione (4.17) del valore attuale di una rendita frazionata immediata e posticipata vista nel capitolo secondo, si ha che, noto il valore attuale della rendita, il tasso d'interesse e il numero di anni, la rata costante è:

$$R = 2.315,99 \cdot \frac{1}{a_{\overline{12}|0,05}} \cdot \frac{j(2)}{0,05}$$

Sulle tavole finanziarie è tabulato il reciproco di  $a_{\overline{12}|0,05}$ , che è  $\alpha_{\overline{12}|0,05} = 0,11282541$ ; inoltre è tabulato il reciproco di  $\frac{j(2)}{0,05}$ , ossia, il fattore di correzione  $\frac{0,05}{j(2)}$ , ed è:

$$\frac{j(2)}{0,05} = \frac{1}{1,01234754} = 0,987803062$$

Quindi, la rata è:

$$R = 2.315,99 \cdot 0,11282541 \cdot 0,987803062 = 258,11$$

**3. RICERCA DEL NUMERO DELLE RATE**

Anche qui bisogna distinguere a seconda che sia noto il valore attuale o il montante della rendita.

**SIANO NOTI IL VALORE ATTUALE, LA RATA COSTANTE E IL TASSO**

Dalla prima delle (1.1) si ha:

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{A}{R}i$$

da cui, mediante i **logaritmi**:

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\log(1+i)} \quad (3.1)$$

Dalla (3.1) si evince che, affinché il problema della ricerca del numero delle rate abbia senso, deve essere  $\frac{A}{R}i < 1$ , ossia:

$$R > Ai$$

Se dalla (3.1) risulta un valore di  $n$  intero, allora il problema della determinazione del numero delle rate è risolto. Può risultare, invece un numero  $n$  tale che:

$$n = n_0 + f$$

in cui  $n_0$  è il massimo intero contenuto in  $n$  e  $f$  è una frazione propria.

Poiché, con  $n_0$  rate non si estingue il debito  $A$ , è necessario ricorrere a degli artifici; i principali sono i seguenti:

- I. si modifica la rata  $R$  per eccesso per ammortizzare il debito in  $n_0$  periodi, ottenendo la rata  $R' = A\alpha_{\overline{n_0}|i}$ , con  $R' > R$ ;
- II. si modifica la rata  $R$  per difetto per ammortizzare il debito in  $n_0 + 1$  periodi, ottenendo la rata  $R'' = A\alpha_{\overline{n_0+1}|i}$ , con  $R'' < R$ ;
- III. si versano  $n_0$  rate di importo  $R$ , estinguendo, in tal modo, una parte di debito  $A$ , il cui valore al tempo zero è pari a  $A' = Ra_{\overline{n_0}|i}$ , in modo che il debito residuo sia pari ad  $A - A'$ , si effettua un versamento integrativo alla fine (avendo supposto la rendita posticipata) del periodo  $n_0 + 1$ , di importo pari a  $R''' = (A - A')(1+i)^{n_0+1}$ ;
- IV. si versano  $n_0$  rate di importo  $R$  e si effettua un versamento integrativo alla fine del periodo  $n_0 + f$ , mediante la rata  $R^{IV} = Rf$ , in cui  $f$  è l'approssimazione dello sviluppo di  $(1+i)^f$  in serie di potenze di  $i$ .

**SIANO NOTI IL MONTANTE, LA RATA COSTANTE E IL TASSO**

Dalla seconda delle (1.1) si ha:

$$(1+i)^n = \frac{S}{R}i + 1$$

da cui, mediante i **logaritmi**:

$$n = \frac{\log\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\log(1+i)} \quad (3.2)$$

Se dalla (3.2) risulta un valore di  $n$  intero, allora il problema della determinazione del numero delle rate è risolto. Anche in questo caso può risultare, invece,  $n = n_0 + f$ . Pertanto, con  $n_0$  rate non si costituisce il capitale  $S$ , si rende necessario, quindi, ricorrere anche in questo caso a degli artifici; i principali sono i seguenti:

- I. si modifica la rata  $R$  per eccesso per costituire il capitale in  $n_0$  periodi, ottenendo la rata  $R' = S\sigma_{\overline{n_0}|i}$ , con  $R' > R$ ;
- II. si modifica la rata  $R$  per difetto per costituire il capitale in  $n_0 + 1$  periodi, ottenendo la rata  $R'' = S\sigma_{\overline{n_0+1}|i}$ , con  $R'' < R$ ;
- III. si versano  $n_0$  rate di importo  $R$ , ottenendo un montante  $S' = Rs_{\overline{n_0}|i}$  e si effettua un versamento integrativo  $R'''$  dopo un tempo  $t$  sufficiente a costituire l'intero capitale  $S$ ;
- IV. si versano  $n_0$  rate di importo  $R$  e si effettua un versamento integrativo alla fine del periodo  $n_0 + f$ , di importo pari a  $R^{IV} = Rf$ .

**ESEMPIO**

Il valore attuale di una rendita immediata posticipata è pari a 4.580 €, il tasso d'interesse effettivo annuo è  $i = 0,05$  e la rata è pari a 500 €. Calcolare la durata della rendita e, nel caso in cui il numero teorico delle rate non risulti intero, ricorrere agli accomodamenti descritti.

La durata  $n$  della rendita si ottiene applicando la formula (3.1), in cui il logaritmo al numeratore della frazione ha senso se e solo se  $\frac{A}{R}i < 1$ ; verificando i dati del problema:

$$\frac{4.580}{500} \cdot 0,05 = 0,458 < 1$$

Si applica ora la formula:

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{4.580}{500} \cdot 0,05\right)}{\log(1 + 0,05)} = 12,55354$$

che equivale a 12 anni 6 mesi e 19 giorni. Non essendo intero il numero ottenuto, ma costituito dalla parte intera  $n_0 = 12$  e dalla parte decimale  $f = 0,55354$ , per risolvere il problema si ricorre alle convenzioni descritte in questo paragrafo.

- I. Si può modificare la rata  $R$  per eccesso, ottenendo la rata  $R'$  che ammortizza il debito di 4.580 € in 12 anni e che si ottiene dalla relazione:

$$R' = 4.580 \cdot \alpha_{\overline{12}|0,05}$$

Dalle tavole si desume che  $\alpha_{\overline{12}|0,05} = 0,11282541$ , pertanto la rata  $R'$  è pari a:

$$R' = 4.580 \cdot 0,11282541 = 516,74$$

- II. Si può modificare la rata  $R$  per difetto, ottenendo la rata  $R''$  che ammortizza il debito di 4.580 € in 13 anni e che si ottiene dalla relazione:

$$R'' = 4.580 \cdot \alpha_{\overline{13}|0,05}$$

Dalle tavole si desume che  $\alpha_{\overline{13}|0,05} = 0,10645577$ , per cui la rata  $R''$  è pari a:

$$R'' = 4.580 \cdot 0,10645577 = 487,57$$

- III. Il valore, al tempo zero, del debito estinto alla fine del dodicesimo anno, versando la rata posticipata costante  $R = 500$  è pari a:

$$A' = 500 \cdot a_{\overline{12}|0,05} = 500 \cdot 8,86325164 = 4.431,63$$

Il debito residuo è pari a  $4.580 - 4.431,63 = 148,37$ . Pertanto, alla fine del tredicesimo anno, per estinguere il debito, sarà effettuato un versamento integrativo di importo pari a:

$$R''' = 148,37 \cdot (1 + 0,05)^{13} = 279,77$$

IV. Si versano 12 rate di importo  $R=500$  e dopo 12 anni 6 mesi e 19 giorni si effettua un versamento integrativo di importo pari a:

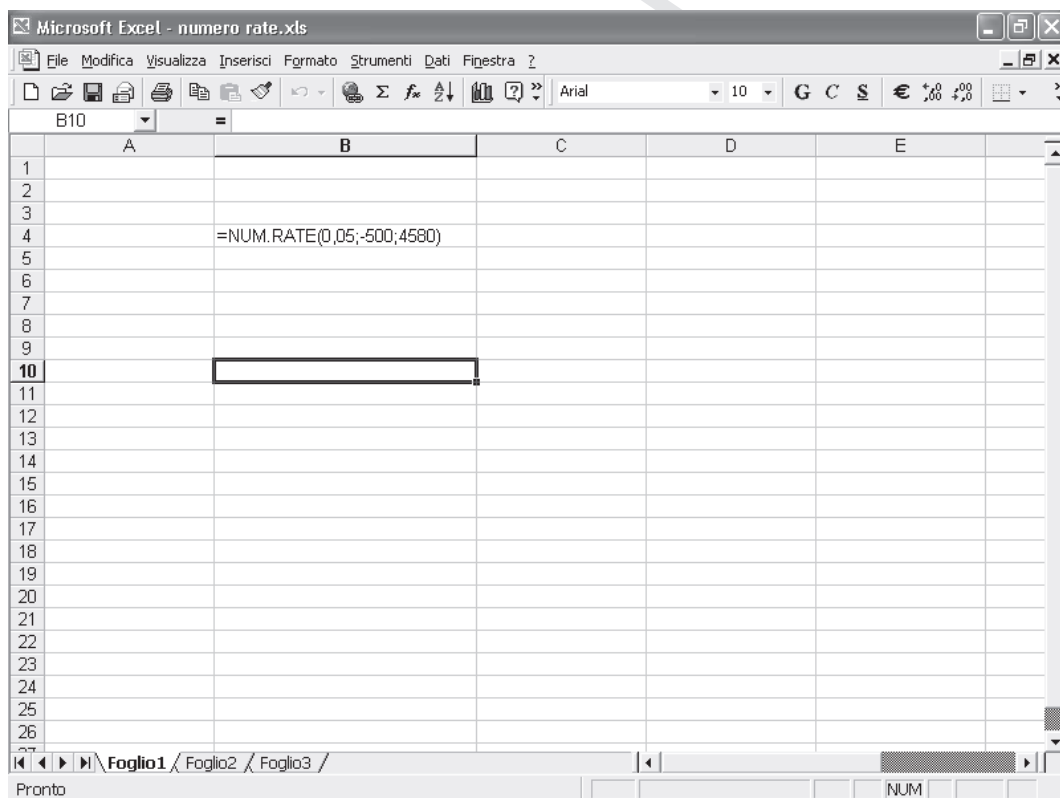
$$R^V = 500 \cdot 0,55354 = 276,77$$

La funzione NUM.RATE di Excel consente di risolvere il problema della ricerca del numero delle rate noti:

- il tasso d'interesse effettivo di periodo della rendita;
- l'importo di ciascuna rata;
- il valore attuale della rendita che può anche essere omissso se è dato il valore futuro ossia il montante della rendita all'istante finale;
- la scadenza dei vari pagamenti che può verificarsi all'inizio di ciascun periodo (allora si digita 1) o alla fine di ciascun periodo (allora si digita 0 o non si digita alcunché come nel nostro caso).

La sua sintassi è **NUM.RATE(tasso\_int;pagam;val\_attuale;val\_futuro;tipo)**.

Relativamente all'ESEMPIO dato, il foglio elettronico è illustrato di seguito.



Il valore risultante è 12,55354, non intero. Per ovviare all'inconveniente si usano gli artifici visti.

#### 4. RICERCA DEL TASSO

Tra i problemi relativi alle rendite, quello concernente la ricerca del tasso d'interesse è, senza dubbio, il più discusso. Quando si cerca di valutare l'effettiva gravosità di un credito al consumo, l'uso di un'unica espressione analitica permette il confronto tra diverse tipologie di credito offerte sul mercato.

Di tale argomento ci occuperemo dettagliatamente nel capitolo settimo concernente la valutazione delle operazioni finanziarie certe.

Nelle (1.1) siano noti l'importo della rata  $R$ , il numero  $n$  delle rate e il montante o il valore attuale della rendita. Si consideri la determinazione del tasso  $i$  della rendita.

Dalla prima delle (1.1) si ha:

$$\frac{A}{R}i = 1 - (1+i)^{-n}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per  $(1+i)^n$ , si ottiene l'equazione di grado  $n+1$ , nella incognita  $i$ :

$$\frac{A}{R}i(1+i)^n - (1+i)^n + 1 = 0$$

In modo analogo, dalla seconda delle (1.1) si ottiene l'equazione di grado  $n$ , nell'incognita  $i$ :

$$(1+i)^n - \frac{S}{R}i - 1 = 0$$

Il problema della determinazione del tasso consiste nel risolvere una delle due ultime equazioni. In generale, per valori elevati di  $n$ , tali equazioni non sono risolvibili facilmente, per cui si ricorre a metodi di approssimazione: i più utilizzati sono l'**interpolazione** e l'**iterazione**.

##### ESEMPIO 1

*Sia data una rendita periodica di 10 rate di 270 € il cui valore attuale è pari ad  $A = 1.970$  €. Determinare il tasso della rendita attraverso:*

- un procedimento di interpolazione lineare;*
- un procedimento iterativo.*

Dai dati del problema si ha che:

$$1.970 = 270 \cdot a_{\overline{10}|i}$$

da cui:

$$a_{\overline{10}|i} = 7,296296296$$

Il valore trovato non è tabulato.

a) Sulle tavole, per i valori di  $a_{\overline{n}|i}$ , alla riga corrispondente a  $n = 10$  si leggono, al variare dei tassi, diversi valori di  $a_{\overline{10}|i}$  fino a trovarne due che sono più vicini possibile a 7,296296296. Si prenderanno quello immediatamente più grande, cioè 7,36008705 in corrispondenza del tasso del 6%, e quello immediatamente più piccolo, cioè 7,27369084 in corrispondenza del tasso del 6,25%.

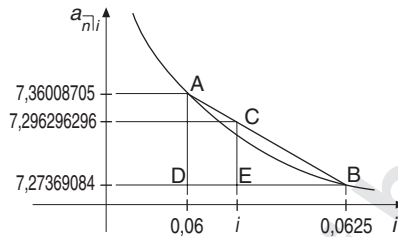


Fig. 1

Si sostituisce all'arco di curva  $AB$  illustrato nella figura un segmento lineare.

I due triangoli  $ADB$  e  $CEB$  sono simili; quindi:

$$AD : CE = DB : EB$$

dove:

$$AD = 7,36008705 - 7,27369084;$$

$$CE = 7,296296296 - 7,27369084;$$

$$DB = 0,0625 - 0,06;$$

$$EB = 0,0625 - i.$$

Pertanto, la proporzione è la seguente:

$$(7,36008705 - 7,27369084) : (7,296296296 - 7,27369084) = (0,0625 - 0,06) : (0,0625 - i)$$

da cui:

$$0,08639621 : 0,022605456 = 0,0025 : (0,0625 - i)$$

Si divide il prodotto dei medi per il primo estremo e si ha:

$$\frac{0,022605456 \cdot 0,0025}{0,08639621} = 0,0625 - i$$

ossia:

$$0,000654121 = 0,0625 - i$$

da cui:

$$i = 0,061845879$$

b) Si ricorre, ora, all'iterazione. Si è già trovato:

$$a_{\overline{10}|i} = 7,296296296$$

Attraverso le tavole finanziarie è possibile scegliere un valore di  $a_{\overline{10}|i}$  prossimo alla radice positiva della (4.3) del secondo capitolo; sia  $i_0$  il valore trovato, lo si sostituisce nell'equazione

suddetta. Se il valore ottenuto è pari a 7,296296296, allora  $i_0$  è il valore di  $i$  richiesto. Ponendo  $a_{\overline{n}|i} = a$  nella (4.3) si ottiene un primo valore  $i_1$  approssimato del tasso d'interesse:

$$i_1 = \frac{1 - (1 + i_0)^{-n}}{a}$$

Si scelga  $i_0 = 0,0625$ , in quanto a esso corrisponde un valore approssimato per difetto del valore di  $a_{\overline{10}|i}$ , pertanto:

$$i_1 = \frac{1 - (1 + 0,0625)^{-10}}{7,296296296} = 0,062306361$$

Proseguendo lungo l'algoritmo di iterazione si sostituisce il valore del tasso d'interesse appena trovato, ottenendo:

$$i_2 = \frac{1 - (1 + 0,062306361)^{-10}}{7,296296296} = 0,062169995$$

che, sostituito in  $a_{\overline{10}|i}$ , dà:

$$a_{\overline{10}|0,062169995} = \frac{1 - (1 + 0,062169995)^{-10}}{0,062169995} = 7,285006598$$

Proseguendo ulteriormente si ha:

$$i_3 = \frac{1 - (1 + 0,062169995)^{-10}}{7,296296296} = 0,062073798$$

che, sostituito in  $a_{\overline{10}|i}$ , dà:

$$a_{\overline{10}|0,062073798} = \frac{1 - (1 + 0,062073798)^{-10}}{0,062073798} = 7,288310223$$

Il procedimento si ripete ottenendo i tassi:

$$i_4 = 0,062005855;$$

$$i_5 = 0,061957827;$$

.....

Il procedimento si arresta, dopo diverse iterazioni, al tasso  $i = 0,061841527$ , per il quale si ha:

$$a_{\overline{10}|0,061841527} = \frac{1 - (1 + 0,061841527)^{-10}}{0,061841527} = 7,296296307$$

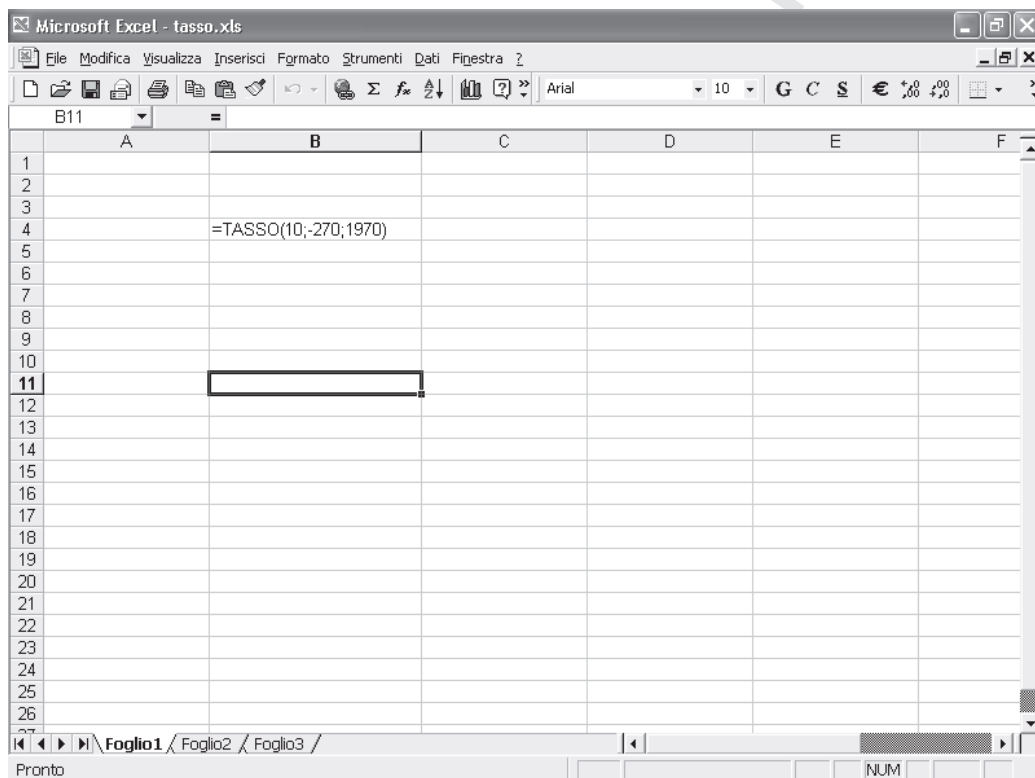
che è un valore molto vicino al valore  $a_{\overline{10}|i} = 7,296296296$ .

La funzione TASSO di Excel consente di risolvere il problema della ricerca del tasso d'interesse di una rendita dati:

- il numero di periodi della rendita;
- l'importo di ciascuna rata;
- il valore attuale della rendita che può anche essere omissso se è dato il valore futuro ossia il montante della rendita all'istante finale;
- la scadenza dei vari pagamenti che può verificarsi all'inizio di ciascun periodo (allora si digita 1) o alla fine di ciascun periodo (allora si digita 0 o non si digita alcunché).

La sua sintassi è **TASSO(periodi;pagam;val\_attuale;val\_futuro;tipo)**.

Relativamente all'ESEMPIO il foglio elettronico è illustrato di seguito.



## ESEMPIO 2

Calcolare il tasso annuo effettivo d'interesse di una rendita posticipata costituita da 7 rate annue ognuna di 1300 € sapendo che il valore attuale di tale rendita è pari a 7.639,167 €.

Dai dati del problema si ha che:

$$7.639,167 = 1.300 \cdot a_{\overline{7}|i}$$

da cui:

$$a_{\overline{7}|i} = \frac{7.639,167}{1.300} = 5,876282308$$

Il valore appena trovato non è tabulato, per cui, per la ricerca del tasso d'interesse si ricorre al procedimento d'iterazione. Si sceglie, innanzitutto, sulle tavole un valore di  $a_{7|i}$  prossimo a quello ottenuto; il valore è 5,83916556 cui corrisponde un tasso  $i_0 = 4,75\%$ . Quindi si sostituisce questo tasso nell'algoritmo di iterazione, ottenendo il tasso  $i_1$ :

$$i_1 = \frac{1 - (1 + 0,0475)^{-7}}{5,876282308} = 0,047199972$$

Andando a calcolare  $a_{7|0,047199972}$  si ha:

$$a_{7|0,047199972} = \frac{1 - (1 + 0,047199972)^{-7}}{0,047199972} = 5,845550897$$

che è un valore più piccolo di 5,876282308. Se ci si vuole avvicinare maggiormente al tasso d'interesse cercato, si procede ancora con l'iterazione sostituendo il tasso  $i_1$  nell'algoritmo di iterazione. Si ottiene così la successione di tassi:

$$i_2 = 0,046953128;$$

$$i_3 = 0,046749616;$$

... ..

Il procedimento si arresta, dopo diverse iterazioni, al tasso  $i = 0,045763002$ , per il quale si ha:

$$a_{7|0,045763002} = \frac{1 - (1 + 0,045763002)^{-7}}{0,045763002} = 5,876282308$$

## Questionario

1. Calcolare la **rata annua anticipata** costante, in regime di **interessi composti**, da versare per 5 anni per costituire un capitale di 11.500 € al tasso d'interesse  $i = 5,8\%$ .  
(par. 2)
2. Calcolare la **rata mensile posticipata** costante, in regime di **interessi composti**, da corrispondere per 14 anni per estinguere un prestito di 55.000 € al tasso effettivo annuo del 5,5%.  
(par. 2)
3. Calcolare la **rata annua anticipata** costante, in regime di **interessi composti**, da corrispondere tra 2 anni, necessaria per costituire tra 10 anni un capitale di 30.000 € al tasso effettivo annuo del 6,6%.  
(par. 4.4 cap. 2 e par. 2 cap. 3)
4. Quanti **semestri** occorrono per costituire, in regime di **interessi composti**, un capitale di 2.500 € versando rate semestrali costanti posticipate di 400 € al tasso d'interesse effettivo annuo del 5%?  
(par. 3)
5. Quale **tasso d'interesse effettivo mensile** è corrisposto per estinguere un debito di 10.000 € se si paga una rata mensile di 238 € per 6 anni?  
(par. 4)

**SOMMARIO:** 1. Introduzione. - 2. Canone di leasing. - 3. Tasso di una operazione di leasing. - Questionario.

## 1. INTRODUZIONE

In questo capitolo ci occuperemo di una particolare operazione finanziaria, il **leasing**, o **locazione finanziaria**, che applica i principi e i metodi propri delle rendite studiate nei capitoli precedenti.

Attraverso tale operazione un'impresa, detta *locatrice*, cede in uso, per un certo periodo di tempo, un dato bene a un'altra, detta *locataria* o *conduttrice*, che necessita della disponibilità del bene e che non intende acquistarne la proprietà, se non altro inizialmente, dietro la corrispondenza di somme, dette **canoni**, a epoche stabilite.

La durata di una operazione di leasing generalmente non supera la *durata economico-tecnica* del bene.

Il conduttore si impegna a corrispondere al locatore un canone che può essere bimestrale, trimestrale, ma che solitamente è mensile ed è calcolato sulla base di diversi fattori tra cui il costo di ammortamento del bene e gli utili spettanti all'impresa locatrice.

Al termine dell'operazione il locatario può assumere una delle seguenti decisioni:

- restituire il bene;
- rinnovare il contratto per un ulteriore periodo;
- riscattare il bene e diventarne proprietario pagando un importo stabilito, detto **prezzo di riscatto**;
- richiedere la sostituzione con altro bene;
- agire secondo altre previsioni contrattuali.

Generalmente, con il termine *leasing* si fa riferimento alla tipologia più diffusa in Italia del leasing finanziario; esistono, tuttavia, altre forme di leasing:

- **leasing operativo** che non prevede un'opzione di riscatto e può essere posto in atto o da un intermediario finanziario o direttamente dal produttore del bene;
- **lease-back** che è un contratto in base al quale un'azienda industriale o commerciale vende alla società di leasing il bene e la società di leasing concede lo stesso bene in leasing all'azienda venditrice.

## 2. CANONE DI LEASING

Le parti convengono, generalmente, un canone di leasing costante per tutta la durata dell'operazione, anche se è frequente la pratica del *leasing indicizzato*.