Abbiamo visto che le utilità marginali dei due beni sono pari ad 1, sappiamo inoltre che il prezzo del bene x_1 è pari a 2 mentre il prezzo del bene x_2 è pari a 8. Ricordando che l'utilità marginale ponderata di un bene è il rapporto tra l'utilità marginale del bene e il suo prezzo, allora avremo:

$$UMpon_1 = \frac{1}{2}; \quad UMpon_2 = \frac{1}{8}$$

Dal confronto tra le utilità marginali ponderate dei due beni si evince che quella del bene x_1 è maggiore di quella del bene x_2, infatti $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$; la scelta del consumatore cade dunque sul bene x_1 nella quantità:

$$\frac{m}{p_1} = \frac{200}{2} \Rightarrow 100$$

Esercizio n. 5.6

Data la funzione di utilità:

[6.1] $U = 2x_1 + x_2$

i prezzi $p_1 = p_2 = 5$ ed il reddito del consumatore $m = 20$:

a) *rappresentare la mappa delle curve d'indifferenza;*
b) *determinare la scelta ottima.*

Risoluzione

a) Partendo dalla funzione di utilità, la [6.1], e esplicitandola rispetto a x_2 si avrà:

[6.2] $x_2 = U - 2x_1$

La mappa delle curve d'indifferenza è, dunque, l'insieme di tutte le rette aventi la medesima inclinazione, *−2*.

b) Le intercette della retta di bilancio sono:

[6.3] $x_1 = \frac{m}{p_1} = \frac{20}{5} = 4$

[6.4] $x_2 = \frac{m}{p_2} = \frac{20}{5} = 4$

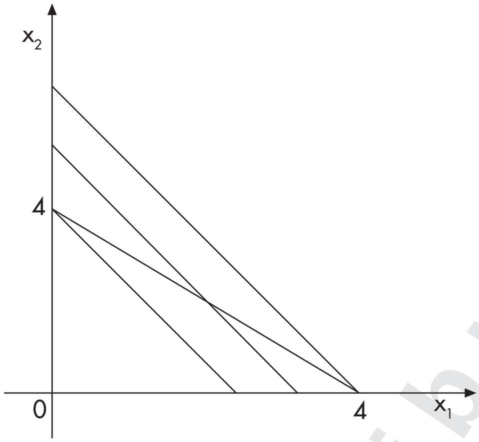

Figura 1

Il punto in cui la retta di bilancio coincide con la più alta curva d'indifferenza (cioè con quella più a destra possibile) ha per coordinate (*4, 0*) che rappresentano il paniere ottimo del consumatore.

Possiamo, inoltre, osservare che essendo $|MRS| > \frac{p_1}{p_2}$ il consumatore massimizzerà la funzione acquistando il bene x_1. Infatti:

$$\frac{dU}{dx_1} = 2; \quad \frac{dU}{dx_2} = 1$$

$$|MRS| = 2$$

Il rapporto fra i prezzi è:

$$\left|\frac{p_1}{p_2}\right| = \frac{5}{5} = 1$$

quindi, essendo $|MRS| > \left|\frac{p_1}{p_2}\right|$, la scelta ottima sarà: $w^*(4, 0)$

Esercizio n. 5.7

Le preferenze di un consumatore sono espresse dalla funzione di utilità:

[7.1] $U = x_1^2 + x_2^2$

Si determini la scelta del consumatore che ha un reddito m = 1 *quando il prezzo del bene* 1 *è* $p_1 = 2$ *e quello del bene* 2 *è* $p_2 = 1$.

Risoluzione

Per determinare la scelta ottima calcoliamo l'utilità marginale della funzione di utilità rispetto ad x_1 e poi rispetto ad x_2. Quindi:

[7.2] $$\frac{dU}{dx_1} = 2x_1$$

[7.3] $$\frac{dU}{dx_2} = 2x_2$$

Il saggio marginale di sostituzione (MRS) sarà:

[7.4] $$|MRS| = \frac{2x_1}{2x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

Determiniamo, adesso, le intercette della retta di bilancio, $2x_1 + x_2 = 1$, con gli assi cartesiani ponendo le relazioni:

$$x_1 = \frac{m}{p_1} \text{ ed } x_2 = \frac{m}{p_2}$$

inserendo nelle su scritte relazioni i rispettivi valori monetari si avrà:

$$x_1 = \frac{1}{2} = 0,5; \quad x_2 = 1$$

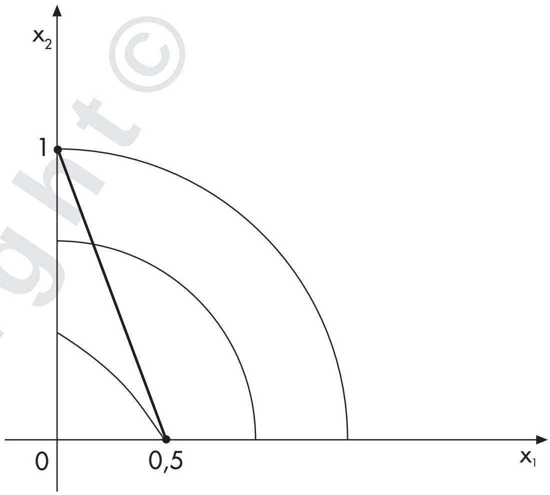

Figura 1

Pertanto dalla [7.4] si ottiene:

$$|MRS| = \frac{x_1}{x_2} = \frac{0,5}{1} = 0,5$$

Essendo il rapporto fra i prezzi pari a:

$$\left|\frac{p_1}{p_2}\right| = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{risulta}$$

$$|MRS| < \frac{p_1}{p_2} \quad \text{infatti} \quad 0,5 < 2$$

In questo caso si determina un ottimo di frontiera: la soluzione ad angolo porta il il consumatore a massimizzare la sua utilità consumando esclusivamente il bene 2.

Alla stessa conclusione si giunge considerando il maggior valore espresso dall'utilità marginale che il bene 2 arreca al consumatore. Infatti, inserendo le quantità x_1 ed x_2 nelle relazioni [7.2] e [7.3] si avrà rispettivamente:

$$\frac{dU}{dx_1} = 2x_1 = 2(0,5) = 1$$

$$\frac{dU}{dx_2} = 2(1) = 2$$

Risulta evidente che:

$$\frac{dU}{dx_2} > \frac{dU}{dx_1}$$

D'altro canto, trattandosi di beni perfetti sostituiti, il consumatore razionale sceglierà di acquistare quello avente il prezzo più basso, ossia il bene 2.

Infine, come si può osservare dalla *Figura*, le curve d'indifferenza espresse dalla funzione di utilità $U = x_1^2 + x_2^2$ hanno forma di circonferenze concentriche.

Esercizio n. 5.8

Data la funzione di utilità:

[8.1] $U = x_2 + y_2$

determinare la scelta ottima essendo noti i valori monetari $p_x = 1$ *(prezzo del bene x),* $p_y = 2$ *(prezzo del bene y) e il reddito del consumatore* m = 4.

Risoluzione

Calcoliamo le utilità marginali relative ai due beni:

[8.2] $\frac{dU}{dx} = UM_x = 2x$

[8.3] $\frac{dU}{dy} = UM_y = 2y$

Scriviamo l'equazione della retta di bilancio:

$x + 2y = 4$

che possiamo rappresentare graficamente congiungendo le sue intercette con gli assi cartesiani, ossia.

$x = \frac{m}{p_x} = \frac{4}{1} = 4$ (**intercetta sull'asse x**)

$y = \frac{m}{p_y} = \frac{4}{2} = 2$ (**intercetta sull'asse y**)

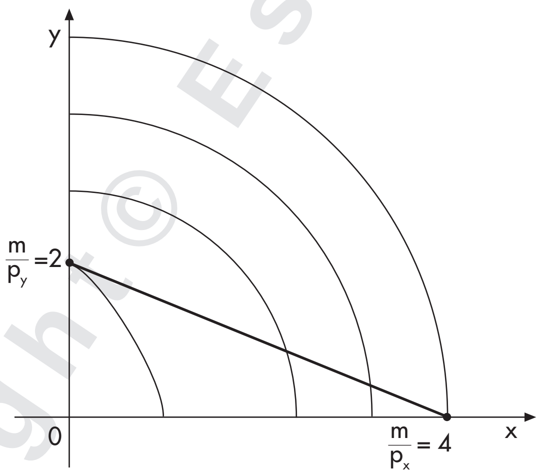

Figura 1

Inserendo i valori di *x* e *y* nelle relazioni [8.2] e [8.3] avremo:

$UM_x = 2(4) = 8$ (**utilità marginale del bene x**)

$UM_y = 2(2) = 4$ (**utilità marginale del bene y**)

Siccome l'utilità marginale del bene x è maggiore di quella ottenibile col *bene y*, il consumatore acquisterà il *bene x* che ha un prezzo più conveniente rispetto al prezzo di y.

Possiamo inoltre osservare che essendo:

$$|MRS| > \frac{p_x}{p_y}$$

il consumatore massimizzerà la funzione acquistando il *bene x*.

Infatti dalle relazioni [8.2] e [8.3] si ottiene:

$$|MRS| = \frac{UM_1}{UM_2} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} = \frac{4}{2} = 2$$

mentre $\left|\frac{p_x}{p_y}\right| = \frac{1}{2}$

Pertanto la scelta ottima sarà:

$$w^*(4, 0)$$

Esercizio n. 5.9

Sia la funzione di utilità di un consumatore:

[9.1] $U = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$

il reddito uguale a *m = 9.000*, il prezzo del *bene 1* $p_1 = 3$; il prezzo del *bene 2* $p_2 = 2$.

Determinare la scelta ottima.

Risoluzione

In via preliminare conviene trasformare la funzione nella forma:

$$U = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

Calcoliamo, poi, l'utilità marginale del *bene 1*:

[9.2] $\frac{dU}{dx_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$

Analogamente per il *bene 2*:

[9.3] $$\frac{dU}{dx_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

Pertanto il MRS sarà:

[9.4] $$|MRS| = \frac{\frac{dU}{dx_1}}{\frac{dU}{dx_2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \cdot 2\sqrt{x_2} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

Scriviamo adesso il vincolo di tangenza fra la curva d'indifferenza e la retta di bilancio:

[9.5] $$|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$$

ossia $\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$ da cui

$$\left(\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{9}{4}$$

Scriviamo il vincolo di bilancio:

[9.6] $p_1x_1 + p_2x_2 = m; \quad 3x_1 + 2x_2 = 9.000$

Impostiamo e risolviamo il sistema formato dai due vincoli:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{9}{4} \\ 3x_1 + 2x_2 = 9.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_2 = 9x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9.000 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{9}{4}x_1$$

$$3x_1 + 2\frac{9}{4}x_1 = 9.000$$

$$6x_1 + 9x_1 = 18.000$$

$$15x_1 = 18.000$$

$$x_1 = \frac{18.000}{15} = 1.200$$

$$x_2 = \frac{9}{4}1.200 = 2.700$$

Esercizio n. 5.10

Data la funzione di utilità:

[10.1] $U = x_1x_2 + x_1 + x_2$

sia, inoltre, il reddito del consumatore $m = 10$ e i prezzi $p_1 = 1$ e $p_2 = 1$.

Determinare la scelta ottima di consumo.

Risoluzione

Per la massimizzazione della funzione vincolata si procederà come segue:

[10.2] $\frac{dU}{dx_1} = x_2 + 1$

[10.3] $\frac{dU}{dx_2} = x_1 + 1$

[10.4] $|MRS| = \frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}$

Imponendo l'uguaglianza fra il saggio marginale di sostituzione e il rapporto fra i prezzi (vincolo di tangenza) e formando il sistema con il vincolo di bilancio avremo:

$$\begin{cases} \dfrac{x_2+1}{x_1+1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_2+1}{x_1+1} = 1 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + 1 = x_1 + 1 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + 1 - 1 \\ x_2 = 10 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_1 = 10 - x_2 \end{cases}$$

$x_1 = 10 - x_1 \Rightarrow 2x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = 5$

$x_2 = 5$

Quindi, il paniere ottimo sarà: $w^*(5, 5)$.

Esercizio n. 5.11

Tizio consuma due beni «perfetti sostituti» il cui $|MRS| = 3$.

a) *Scrivere la funzione di utilità;*
b) *se* $p_1 = 2$; $p_2 = 4$; $m = 100$ *individuare la scelta ottima.*

Risoluzione

a) Ricordiamo che la funzione di utilità per i beni perfetti sostituti è del tipo $U = ax_1 + bx_2$ (cfr. Tabella 1, Sezione Terza).

Dovendosi verificare che $|MRS| = 3$ la funzione di utilità sarà del tipo:

[11.1] $U = 3x_1 + x_2$

Infatti, calcolando l'utilità marginale rispetto a x_1 e poi a x_2 si ha:

[11.2] $\frac{dU}{dx_1} = 3$

[11.3] $\frac{dU}{dx_2} = 1$

e quindi:

$|MRS| = 3$

Naturalmente, qualsiasi trasformazione monotonica della funzione di utilità [11.1], ad es. $U = 12x_1 + 4x_2$, lascerebbe invariato il valore del *MRS*.

b) Trattandosi di beni «perfetti sostituti» il consumatore razionale opterà per il consumo del bene avente il minor prezzo, cioè il *bene 1* il cui prezzo è $p_1 = 2$. Pertanto:

[11.4] $x_1 = \frac{m}{p_1} \Rightarrow \frac{100}{2} = 50$

Risulta, quindi, un paniere ottimo formato da $w^*(50; 0)$.

La relazione [11.4] si giustifica in base alla seguente considerazione.

Poiché il vincolo di bilancio è:

$$2x_1 + 4x_2 = 100$$

oppure

$$x_1 + 2x_2 = 50$$

e si acquista la quantità $x_2 = 0$ (in quanto $p_2 > p_1$), il vincolo di bilancio può essere riscritto come segue:

$$x_1 + 2 \cdot 0 = 50 \Rightarrow x_1 = 0$$

Graficamente risulta, infatti, che la scelta ottima si determinerà nel punto *A* (punto di frontiera):

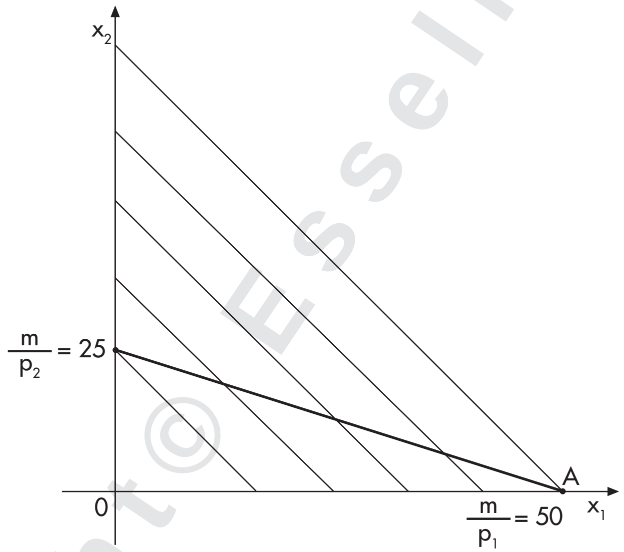

Figura 1

L'inclinazione delle curve d'indifferenza (in questo caso le curve sono lineari) si ottiene esplicitando la funzione di utilità come segue:

[11.5] $x_2 = U - 3x_1$

Quindi l'insieme di rette (parallele) aventi coefficiente angolare pari a (– *3*) rappresenta la mappa delle curve d'indifferenza, ottenuta in corrispondenza dei diversi valori di utilità.

Esercizio n. 5.12

Si consideri la funzione di utilità:

[12.1] $U = \min\{1{,}5x_1; x_2\}$

rappresentativa di beni perfettamente complementari. Siano inoltre i prezzi dei due beni considerati pari a $p_1 = 3$ e $p_2 = 18$ e il reddito del consumatore $m = 60$.

Determinare la scelta ottima.

Risoluzione

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 = x_2 & \textbf{(condizione di ottimo)} \\ 3x_1 + 18x_2 = 60 & \textbf{(vincolo di bilancio)} \end{cases}$$

Risolvendo si avrà:

$$3x_1 + 18(1{,}5\,x_1) = 60$$

$$3x_1 + 27x_1 = 60$$

oppure:

$$x_1 + 9x_1 = 20$$

$$10x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = 1{,}5 \cdot 2 = 3$$

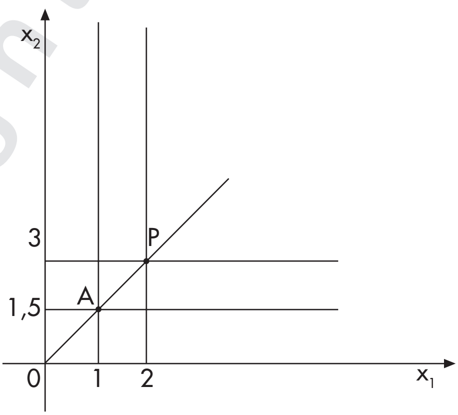

Figura 1

Per tracciare le curve d'indifferenza (curve ad *L*) prendiamo in considerazione l'equazione che esprime la condizione di ottimo:

$x_2 = 1{,}5x_1$

Questa funzione	per	$x_1 = 0$	rende	$x_2 = 0$	(punto 0)
	per	$x_1 = 1$	rende	$x_2 = 1{,}5$	(punto A)

Unendo il punto *0* con il punto *A* si ottiene l'andamento del vettore $\overline{OP}$ sul quale è situato il punto *P* che rappresenta la scelta ottima.

Esercizio n. 5.13

Data la funzione di utilità:

[13.1] $U = \log x_1 + x_2$

il reddito *m = 10,* il prezzo del *bene 1* $p_1 = 2$, il prezzo del *bene 2* $p_2 = 3$.

Calcolare la scelta ottima del consumatore.

Risoluzione

Calcoliamo l'utilità marginale del *bene 1* operando sulla funzione di utilità [13.1]:

[13.2] $$\frac{dU}{dx_1} = \frac{1}{x_1}$$

Analogamente per il *bene 2*:

[13.3] $$\frac{dU}{dx_2} = 1$$

Pertanto, il MRS sarà:

[13.4] $$|MRS| = \frac{\frac{dU}{dx_1}}{\frac{dU}{dx_2}} = \frac{1}{x_1}$$

Scriviamo adesso la condizione di tangenza fra la curva d'indifferenza e la retta di bilancio:

[13.5] $$|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$$