

3. Calcolo letterale

1) Monomi

Espressione algebrica letterale

Insieme di numeri relativi, taluni rappresentati da lettere, legati fra loro da segni di operazioni.

Monomio

Espressione algebrica che non contiene le operazioni di addizione e di sottrazione.

L'espressione $21a^2b^2$ è un monomio in cui 21 è detto **coefficiente** e il prodotto dei suoi fattori letterali a^2b^2 è detta **parte letterale**.

I monomi si suddividono in:

- **interi** se al denominatore non compaiono lettere;
- **frazionari** se al denominatore compaiono lettere.

Due monomi si dicono:

- **simili** se hanno uguale la parte letterale;
- **opposti** se sono simili e hanno per coefficiente due numeri opposti;
- **uguali** se sono simili e hanno anche uguale coefficiente.

Grado

Grado complessivo

Si definisce **grado complessivo** di un monomio la somma degli esponenti delle lettere del monomio.

Grado relativo a una lettera

Si definisce **grado relativo a una lettera** l'esponente con cui tale lettera compare.

Operazioni con i monomi

Somma algebrica La **somma (differenza)** di due monomi simili è un monomio simile a essi, avente per coefficiente la somma (differenza) dei monomi dati.

Prodotto Il **prodotto** di due o più monomi è un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale tutte le lettere che figurano nei monomi, ciascuna scritta una volta sola, con esponente uguale alla somma degli esponenti con i quali figura nei singoli fattori.

Quoziente Il **quoziente** di due monomi, il primo divisibile per il secondo, è un monomio che ha per coefficiente il quoziente dei coefficienti e per parte letterale le lettere del dividendo, ciascuna con esponente uguale alla differenza degli esponenti che essa ha nel dividendo e nel divisore.

Potenza La **potenza** di un monomio è un monomio che ha per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale le stesse lettere della base, ciascuna con esponente uguale al prodotto del suo esponente per l'esponente della potenza.

Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di monomi

Massimo comun divisore (M.C.D.). Il **massimo comun divisore** di due o più monomi è un monomio il cui coefficiente corrisponde al M.C.D. dei coefficienti e la cui parte letterale è data dalle lettere comuni ai monomi dati, prese ciascuna una volta sola e con il minimo esponente.

Minimo comune multiplo (m.c.m.). Il **minimo comune multiplo** di due o più monomi è un monomio il cui coefficiente corrisponde al m.c.m. dei coefficienti e la cui parte letterale è data dalle lettere comuni e non comuni ai monomi dati, prese ciascuna una volta sola e con il massimo esponente.

2) Polinomi

Si definisce **polinomio** la somma algebrica di più monomi, i quali sono detti **termini** del polinomio.

Grado

Grado assoluto. Il **grado assoluto** di un polinomio corrisponde al maggiore dei gradi dei monomi che lo compongono.

Grado relativo. Il **grado relativo** di un polinomio rispetto a una lettera è il maggiore esponente che la lettera presenta nel polinomio.

Un polinomio si dice:

- **omogeneo** se tutti i monomi che lo compongono sono dello stesso grado;
- **completo** se figurano tutte le potenze di una lettera fino al grado zero.

3) Prodotti notevoli

Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Cubo di un binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Potenza n -esima di un binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \left(\text{v. capitolo 17 per i coefficienti binomiali } \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \right)$$

Potenze di un binomio

I coefficienti dello sviluppo di un binomio si susseguono secondo il seguente prospetto, detto **triangolo di Tartaglia**:

				1			
				1	1		
			1	2	1		
		1	3	3	1		
	1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1		

Infatti:

$$(a+b)^0 =$$

1

$$(a+b)^1 =$$

$a+b$

$$(a+b)^2 =$$

$a^2+2ab+b^2$

$$(a+b)^3 =$$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$(a+b)^4 =$$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$$(a+b)^5 =$$

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Quadrato di un trinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Quadrato di un polinomio

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + \dots + 2a_{n-1}a_n$$

Somma per la differenza di due termini

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

4) Scomposizione di un polinomio in fattori

Un polinomio si dice **riducibile** se si può decomporre nel prodotto di due o più polinomi e monomi di grado inferiori.

Scomporre o **fattorizzare** un polinomio in fattori significa metterlo sotto forma di prodotto di due o più polinomi che sono irriducibili.

4.1 Scomposizione mediante raccoglimento a fattor comune totale o a fattore parziale

Raccoglimento a fattore comune totale. Consiste nel calcolare il M.C.D. dei termini e nel metterlo in evidenza davanti a una parentesi e si inserisce nella parentesi il risultato della divisione di ciascun termine del polinomio per il M.C.D.

Raccoglimento a fattore parziale. Si ricorre a esso quando il M.C.D. dei termini è 1. Si raccoglie un fattore comune fra alcuni dei termini presenti, quindi, si raccoglie un altro fattore comune ad altri termini. Se nelle parentesi delle due scomposizioni effettuate si trova lo stesso polinomio, si può mettere in evidenza questa stessa parentesi.

4.2 Scomposizione mediante prodotti notevoli

Trinomio che sia quadrato di un binomio

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Quadrinomio che sia cubo di un binomio

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Differenza di due quadrati

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Differenza di due cubi

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Somma di due cubi

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Differenza di potenze con uguale esponente

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}$$

Somma di potenze con uguale esponente dispari

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad n \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

Differenza di potenze con uguale esponente pari

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1}) \quad n \in \mathbb{N} \text{ pari}$$

Trinomio caratteristico di secondo grado

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

4.3 Teorema del resto e teorema di Ruffini

4.3.1 Divisione di un polinomio per un monomio

Per dividere un polinomio per un monomio, non nullo, si divide ciascun termine del polinomio per il monomio e si addizionano algebricamente i quozienti parziali ottenuti.

4.3.2 Divisione di due polinomi in una variabile

Dividendo multiplo del divisore

Il polinomio $P(x)$ è divisibile per il polinomio $D(x)$, non nullo, se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x)$$

$Q(x)$ è detto **polinomio quoziente** dei due polinomi dati e si scrive:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x)$$

Se il grado del dividendo $P(x)$ è m e il grado del divisore $D(x)$ è $n \leq m$, il quoziente $Q(x)$ ha grado $m - n$.

Dividendo non multiplo del divisore

Se $P(x)$ e $D(x)$ sono due polinomi nella variabile x , e il grado di $P(x)$ è non minore del grado di $D(x)$ non nullo, allora si può determinare uno e un solo polinomio $Q(x)$, detto **quoziente**, di grado uguale alla differenza dei gradi di $P(x)$ e $D(x)$, e uno e un solo polinomio $R(x)$, detto **resto**, di grado inferiore a quello di $D(x)$, in modo che si abbia:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

✔ Teorema del resto

Il resto R della divisione di un polinomio $P(x)$ per il binomio $x - a$ (con $a \in R$) è dato dal valore che assume il polinomio quando al posto di x si sostituisce il numero a , ossia l'opposto del termine noto del divisore:

$$P(a) = R \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x) + R \Rightarrow P(a) = (a - a)Q(a) + R$$

Teorema di Ruffini

Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $P(x)$ sia divisibile per il binomio $x - a$ (con $a \in R$) è che il polinomio si annulli quando al posto di x si sostituisce il numero a :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow \exists Q(x): P(x) = (x - a)Q(x)$$

a è detto **zero** o **radice** del polinomio.

Regola di Ruffini

Quando si divide il polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ per il binomio $D(x) = x - a$, il quoziente $Q(x)$, che è di grado $n - 1$, ha il primo coefficiente uguale al primo coefficiente (a_n) del dividendo. Ciascuno dei coefficienti successivi di $Q(x)$ si ottiene moltiplicando per a il coefficiente che lo precede e sommando al prodotto il coefficiente di $P(x)$ che occupa lo stesso posto.

L'ultimo numero calcolato in tal modo è il resto R della divisione che può essere $R = 0$ oppure $R = c$ (costante).

Divisibilità di binomi notevoli del tipo $a^n - b^n$

Dividendo	Divisore	n	Divisibilità	Resto
$a^n - b^n$	$a - b$	pari dispari	sì	$R = a^n - a^n = 0$
$a^n - b^n$	$a + b$	pari dispari	sì no	$R = (-a)^n - a^n = 0$ $R = (-a)^n - a^n = -2a^n$
$a^n + b^n$	$a + b$	pari dispari	no sì	$R = (-a)^n + a^n = -2a^n$ $R = (-a)^n + a^n = 0$
$a^n + b^n$	$a - b$	pari dispari	no	$R = a^n + a^n = 2a^n$

Zeri di un polinomio

Ogni **radice intera** di un polinomio del tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

è un divisore del termine noto e ogni **radice razionale** $\frac{p}{q}$ (con p e q

primi tra loro) del polinomio ha per numeratore un divisore del termine noto e per denominatore un divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

5) M.C.D. e m.c.m. di due o più polinomi

Massimo comun divisore (M.C.D.). Il **massimo comun divisore** di due o più polinomi, che siano stati scomposti in fattori, è un polinomio che si ottiene dal prodotto dei fattori comuni, presi una sola volta e con il minimo esponente.

Minimo comune multiplo (m.c.m.). Il **minimo comune multiplo** di due o più polinomi, che siano stati scomposti in fattori, è un polinomio che si ottiene dal prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi una sola volta e con il massimo esponente.

6) Frazioni algebriche

Definizione

Dicesi **frazione algebrica** il quoziente di due polinomi (o monomi), il secondo dei quali non nullo.

I due polinomi (o monomi), dei quali la frazione algebrica costituisce il quoziente, si chiamano **termini** della frazione, più esattamente **numeratore** e **denominatore**.