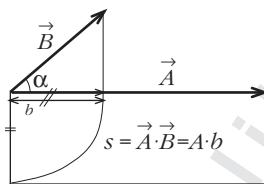


## 8) Prodotto scalare o prodotto interno

Si definisce **prodotto scalare**  $s$  di due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , l'area del rettangolo che ha per lati il modulo del vettore  $\vec{A}$  e la lunghezza della proiezione del vettore  $\vec{B}$  sul vettore  $\vec{A}$ .



(Fig. 16)

Indicando con  $b$  la lunghezza della proiezione del vettore  $\vec{B}$  su  $\vec{A}$ , dalla figura 16 si ha  $s = A \cdot b$

(8.1) Se  $\alpha < 90^\circ \rightarrow b > 0 \rightarrow A \cdot b > 0$  il prodotto scalare è positivo

(8.2) Se  $\alpha > 90^\circ \rightarrow b < 0 \rightarrow A \cdot b < 0$  il prodotto scalare è negativo

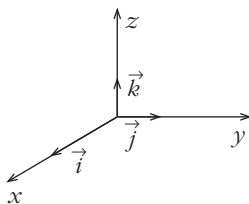
(8.3) Se  $\alpha = 0^\circ \rightarrow b = B \rightarrow A \cdot b = A \cdot B$

(8.4) Se  $\alpha = 90^\circ \rightarrow b = 0 \rightarrow A \cdot b = 0$  il prodotto scalare è nullo



Il prodotto scalare  $s$  dei vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  è dato da  $s = AB \cos \alpha$ .

## Prodotto scalare tra i versori degli assi cartesiani



(Fig. 17)

Essendo  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  perpendicolari fra loro e di misura unitaria, dalla (8.3) e dalla (8.4) risulta che:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

### 8.1 Proprietà del prodotto scalare

(i) Il prodotto scalare è **commutativo**:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

(ii) Il prodotto scalare gode della **proprietà distributiva** rispetto alla somma:

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$$

### 8.2 Prodotto scalare di due vettori in funzione delle loro componenti

Dati due vettori:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

il loro prodotto scalare  $s$  è:

$$s = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

#### Dimostrazione

$$\begin{aligned} s = \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = A_x B_x \vec{i} \cdot \vec{i} + A_x B_y \vec{i} \cdot \vec{j} + A_y B_x \vec{j} \cdot \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \cdot \vec{j} = \\ &= A_x B_x + A_y B_y \end{aligned}$$

## Esempio

Calcolare il prodotto scalare fra i vettori:

$$\vec{A} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$\vec{B} = 4\vec{i} + 9\vec{j}$$



Calcolare l'angolo compreso fra i due vettori.

### Soluzione

$$s = A_x B_x + A_y B_y = (5 \cdot 4) + (7 \cdot 9) = 63$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha$$

quindi  $\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$ , per cui:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = 8,60$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{4^2 + 9^2} = 9,85$$

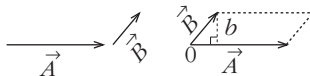
Sostituendo i valori trovati nella formula:

$$\cos \alpha = \frac{63}{8,60 \cdot 9,85} = 0,74$$

$$\alpha \cong 42^\circ$$

## 9) Prodotto vettoriale o prodotto esterno

Due vettori applicati allo stesso punto individuano un parallelogramma di lati corrispondenti ai moduli dei due vettori.

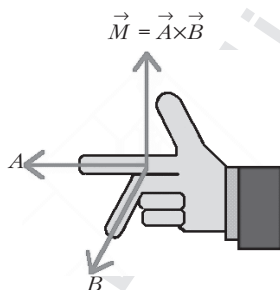


(Fig. 18)

Il **prodotto vettoriale**  $\vec{p}$  tra due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  si indica con  $\vec{A} \times \vec{B}$  e si legge *A esterno B* ed è un vettore che ha:

- direzione perpendicolare al piano formato dai due vettori;
- modulo pari all'area del parallelogramma definito dai due vettori;
- verso definito dalla **regola della mano destra** (indice = primo vettore; medio = secondo vettore; pollice = risultato) o della **vite destrorsa**.

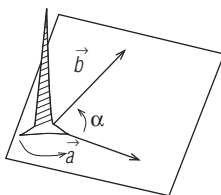
### Regola della mano destra



(Fig. 19)

Disponendo le dita della mano destra come una terna di assi cartesiani e facendo corrispondere l'indice e il medio con le direzioni di  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , il momento ha la direzione del pollice.

### Regola della vite destrorsa



(Fig. 20)

Il verso del prodotto vettoriale è quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruota da  $\vec{A}$  a  $\vec{B}$ , ed è:

- negativo se la rotazione avviene in senso orario;
- positivo se la rotazione avviene in senso antiorario.

Consideriamo la figura 18 in cui il parallelogramma è definito dai vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

Se indichiamo con  $b$  l'altezza del parallelogramma e con  $\alpha$  l'angolo compreso tra i due vettori notiamo che il modulo del prodotto vettoriale  $\vec{p}$  dei vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , essendo uguale all'area del parallelogramma, è uguale a  $p = A \cdot b$

□

Dalla trigonometria si ha che:

$$b = B \sin \alpha \text{ e quindi}$$

$$p = AB \sin \alpha$$

Inoltre:

$$(9.1) \text{ Se } \alpha = 0^\circ \rightarrow b = 0 \rightarrow A \cdot b = 0$$

$$(9.2) \text{ Se } \alpha = 90^\circ \rightarrow b = B \rightarrow p = A \cdot B$$

### Prodotto tra i versori degli assi cartesiani

Dalla figura 17 si ha che, essendo  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  perpendicolari fra loro e di misura unitaria il loro prodotto esterno è dato da:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

## 9.1 Proprietà del prodotto vettoriale

(i) Il prodotto scalare è **anticommutativo**:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

(ii) Il prodotto vettoriale gode della **proprietà distributiva** rispetto alla somma:

$$\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B}$$

## 9.2 Prodotto vettoriale di due vettori in funzione delle loro componenti

Dati due vettori:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

il loro **prodotto vettoriale**  $\vec{p}$  è:

$$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = A_x B_x (\vec{i} \times \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \times \vec{j}) + A_y B_x (\vec{j} \times \vec{i}) + \\ &+ A_y B_y (\vec{j} \times \vec{j}) = A_x B_y \vec{k} - A_y B_x \vec{k} = (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \end{aligned}$$

## Test di verifica

1. Dati due vettori:  $\vec{A} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ ;  $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  il vettore differenza ha come componenti lungo gli assi rispettivamente 3 e 1.

a) vero

b) falso

2. Il vettore  $\vec{A} = \vec{j}$  rappresenta il vettore unitario lungo l'asse x.

a) vero

b) falso

3. Il vettore OA ha componenti (5, 2). Il vettore OB ha componenti (2, 3). Il vettore somma ha componenti (8, 4).

a) vero

b) falso

4. Dati due vettori:  $\vec{A} = 6\vec{i} + \vec{j}$ ;  $\vec{B} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$  il vettore somma ha come modulo la radice quadrata della somma dei quadrati di 9 e di 4.

a) vero

b) falso

5.  La formula seguente serve a determinare l'angolo che un vettore

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \text{ forma con l'asse x: } \alpha = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

a) vero

b) falso

6. Il prodotto di due vettori non nulli:

a) è uno scalare;

b) non si può effettuare in quanto i vettori si possono sommare ma non moltiplicare;

c) ha come risultato un vettore che giace su un piano verticale ai due vettori dati;