Esercizio n. 14.3

Data la funzione di utilità intertemporale

[3.1] $U = c_1 c_2^{\frac{1}{2}}$

il reddito disponibile del primo periodo è $m_1 = 160$, quello del secondo periodo è $m_2 = 60$.

Sia infine, il tasso d'interesse annuo unitario posticipato pari ad $i = 0{,}04$ in un mercato di capitali perfetto.

Determinare la scelta ottima di consumo intertemporale.

Risoluzione

Per determinare la scelta ottima di consumo occorre massimizzare la funzione di utilità intertemporale vincolata, la [3.1]:

[3.2] $$\frac{dU}{dc_1} = c_2^{\frac{1}{2}}$$

[3.3] $$\frac{dU}{dc_2} = \frac{1}{2} c_2^{\frac{1}{2}-1} \cdot c_1 = \frac{1}{2} c_2^{-\frac{1}{2}} \cdot c_1 \cdot$$

Pertanto il MRSI sarà

[3.4] $$|MRSI| = \frac{c_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} c_2^{-\frac{1}{2}} c_1} \text{ oppure}$$

$$|MRSI| = \frac{2c_2^{\frac{1}{2}}}{c_2^{-\frac{1}{2}} c_1} = 2 \frac{c_2^{\frac{1}{2}}}{c_2^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{c_1}.$$

Si osservi il quoziente:

$$\frac{c_2^{\frac{1}{2}}}{c_2^{-\frac{1}{2}}} = c_2^{\frac{1}{2}} : c_2^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= c_2^{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= c_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = c_2.$$

Quindi, si potrà scrivere

$$|MRSI| = \frac{2c_2}{c_1}.$$

Per determinare il valore del *MRSI* in modo più immediato, si può adoperare in alternativa la seguente procedura di calcolo: operiamo una trasformazione monotonica della funzione di utilità, cioè:

$$U = c_1 c_2^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad U = \log c_1 + \frac{1}{2} \log c_2;$$

$$\frac{dU}{dc_1} = \frac{1}{c_1}; \qquad \frac{dU}{dc_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_2}.$$

$$|MRSI| = \frac{\frac{1}{c_1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c_2}} = \frac{2c_2}{c_1}.$$

Il **vincolo di tangenza** è espresso dalla relazione

[3.5] $$MRSI = \frac{p_1}{p_2}$$

quello di bilancio espresso in termini di valore attuale è

[3.6] $$c_1 + \frac{1}{1+i}c_2 = m_1 + \frac{1}{1+i}m_2;$$

$$c_1 + \frac{1}{1+0,04}c_2 = 160 + \frac{1}{1+0,04}60$$

quindi $c_1 + \frac{1}{1,04}c_2 = 217,69.$

Il sistema risolutivo sarà:

$$\begin{cases} \frac{2c_2}{c_1} = \frac{1}{\frac{1}{1,04}} \\ c_1 + \frac{1}{1,04}c_2 = 217,69 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{2c_2}{c_1} = 1,04 \\ c_1 + 0,96c_2 = 217,69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c_2 = 1,04c_1 \\ c_1 = 217,69 - 0,96c_2 \end{cases}$$

$2c_2 = 1,04\ (217,69 - 0,96c_2)$

$2c_2 = 226,40 - 0,9984c_2;$

$2,99c_2 = 226,40$

$$c_2 = \frac{226,40}{2,99} = 75,71$$

da cui $c_1 = 217,69 - 0,96(75,71)$

$c_1 = 145.$