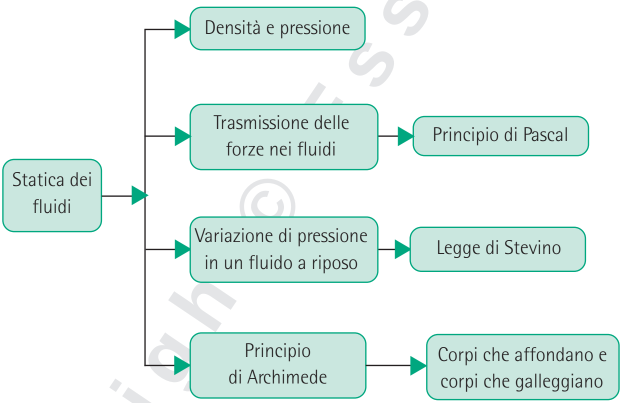
1. Statica dei fluidi

Di cosa parleremo

In questo capitolo ci occuperemo della statica dei fluidi (idrostatica) e nel capitolo successivo della dinamica dei fluidi (idrodinamica) e tratteremo principalmente il comportamento dei liquidi; le considerazioni che faremo potranno essere estese anche ai gas.

Più precisamente ci occuperemo di liquidi perfetti e cioè di liquidi incomprimibili e privi di attriti interni.



1) Densità e pressione

La materia, dal punto di vista macroscopico, può essere suddivisa in **solida** e **fluida**; i fluidi, dal latino 'fluere' – scorrere, sono tutte quelle sostanze presenti in natura allo stato liquido o gassoso.
I fluidi, a differenza dei solidi, non hanno forma propria; infatti, un liquido tende ad espandersi sotto l'influenza del proprio peso, mentre un gas, molto più leggero, tende a occupare tutto lo spazio disponibile. Questo diverso comportamento è determinato dai legami intermolecolari che caratterizzano le varie sostanze i quali sono: molto forti nei solidi, deboli nei liquidi, quasi inesistenti nei gas. Si dice che una porzione di fluido – liquido o gas – è in **quiete** (rispetto a un determinato sistema di riferimento), quando la sua posizione globale non muta al variare del tempo, benché, all'interno della porzione stessa, le molecole continuino a muoversi in ogni senso.
Le variabili che caratterizzano i fluidi in quiete, sono principalmente la **densità** e la **pressione**.

1.1 La densità

La **densità** $\rho = \frac{m}{V}$ è definita dal rapporto fra la massa m del fluido e il volume V occupato da esso.
La densità può dipendere da molti fattori quali la pressione e la temperatura. Nel caso dei liquidi questa dipendenza è irrilevante mentre per i gas è notevole.
L'equazione dimensionale della densità è $[\rho] = [m \cdot l^{-3}]$ e l'unità di misura è il $\frac{Kg}{m^3}$.

1.2 La pressione

La **pressione** esercitata da una forza su una superficie S è definita dalla relazione $P = \frac{F_1}{S}$, dove F_1 è la componente della forza perpendicolare alla superficie S.
L'equazione dimensionale della pressione è:
$[P] = [F \cdot S^{-1}] = [m \cdot a \cdot l^{-2}] = [m \cdot lt^{-2} \cdot l^{-2}] = [m \cdot l^{-1}t^{-2}]$

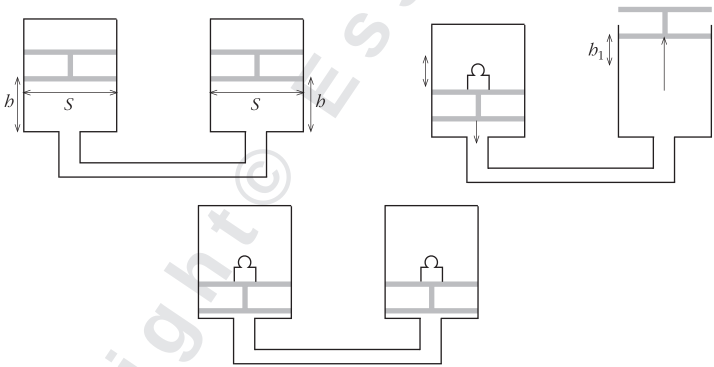
L'unità di misura nel Sistema Internazionale è il **Pascal** (*Pa*) dove $1Pa = \dfrac{1N}{1m^2}$, nel Sistema C.G.I. è il **baria** dove $1baria = \dfrac{1dine}{1cm^2}$.

Vale la trasformazione:

$$1Pa = \frac{1N}{1m^2} = \frac{10^5\,dine}{10^4\,cm^2} = 10barie$$

2) Trasmissione delle forze nei fluidi - Principio di Pascal

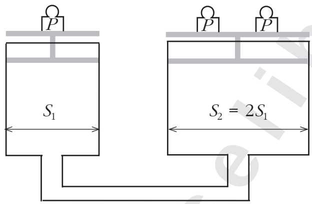
Consideriamo la figura 1.a in cui due recipienti dotati di pistone contenenti un liquido sono messi in collegamento. I recipienti sono dotati di un pistone e hanno la stessa sezione *S*.



(Figg. 1.a, 1.b, 1.c)

In stato di quiete i due pistoni si trovano alla medesima altezza.
Se appoggiamo un peso sul pistone di sinistra il pistone di destra viene automaticamente sollevato e questo significa che la forza applicata sul pistone di sinistra viene trasmessa al pistone di destra (Fig. 1.b).

Per riportare i due pistoni allo stesso livello è necessario appoggiare su quello di destra lo stesso peso che avevamo posato su quello di sinistra (Fig. 1.c).
L'esperienza dimostra che se il cilindro di destra avesse avuto una superficie doppia del cilindro di sinistra, per ristabilire l'equilibrio avremmo dovuto appoggiare sul pistone di destra un peso doppio di quello appoggiato sul pistone di sinistra (Fig. 2).



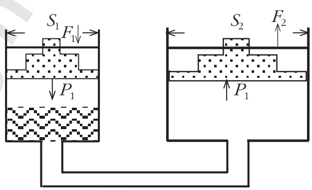
(Fig. 2)

Quindi, quello che si trasmette da una parte all'altra del liquido non è la forza applicata ma la pressione.

Principio di Pascal

Una pressione esercitata in un punto di una massa fluida si trasmette in ogni altro punto e in tutte le direzioni con la stessa intensità.

Consideriamo due cilindri muniti di stantuffi e comunicanti fra loro (Fig. 3).



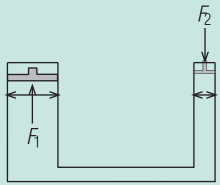
(Fig. 3)

Se sullo stantuffo di sinistra di sezione S_1 si applica una forza F_1, la pressione risultante è $p_1 = \frac{F_1}{S_1}$. Per il principio di Pascal deve essere $p_2 = p_1$ e quindi la forza trasmessa sarà pari a:

$$F_2 = p_2 S_2 = p_1 S_2 = \frac{F_1}{S_1} \cdot S_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

Esempio

In una pressa idraulica simile a quella in figura 2,la sezione del pistone maggiore ha un'area $S_1 = 200 cm^2$ mentre quella del pistone minore è $S_2 = 5,0 cm^2$.
Se a quest'ultimo viene applicata una forza di $250 N$, si determini la forza F_1 agente sul pistone maggiore.



(Fig. 4)

Soluzione

Per il principio di Pascal la pressione esercitata sul pistone minore è uguale a quella esercitata sul pistone maggiore, ossia $p_1 = p_2$. Quindi, essendo $p = \frac{F}{S}$ si ha $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ da cui segue che:

$$F_1 = S_1 \frac{F_2}{S_2} = 200 \cdot \frac{250}{5} = 10000 N = 10 kN$$

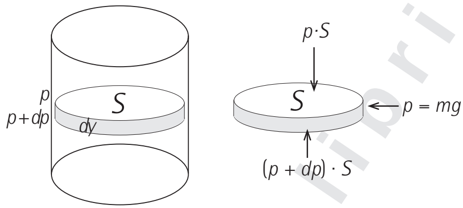
3) Variazione di pressione in un fluido a riposo. Legge di Stevino

Se p_0 è la pressione esercitata sulla superficie di un fluido di densità ρ, la pressione alla profondità h è data da:

$p = p_0 + \rho g h$

Dimostrazione

Consideriamo una porzione cilindrica del fluido di area S, e di spessore dy (Fig. 5). Indichiamo con dp la differenza di pressione fra la base superiore e quella inferiore del cilindro quindi, se p è la pressione sulla faccia superiore, su quella inferiore sarà $p + dp$.



(Fig. 5)

Essendo il fluido in quiete anche la porzione considerata non è in movimento e quindi la somma delle forze agenti su di essa è media.
Analizziamo le pressioni che si esercitano sulle superfici del cilindro e, siccome una pressione è definita dal rapporto fra la forza applicata *perpendicolarmente* a una superficie e la superficie stessa, vediamo quali sono le forze che agiscono perpendicolarmente alle superfici del cilindro:

Superficie laterale
Le forze che agiscono perpendicolarmente alla superficie laterale sono forze orizzontali le quali, essendo dovute unicamente alla pressione, hanno tutte lo stesso valore e si annullano per ragioni di simmetria.

Basi del cilindro

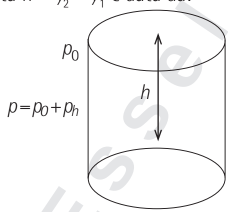
Le forze che agiscono perpendicolarmente alle basi del cilindro sono:

- La forza di pressione sulla faccia superiore del cilindro $F_1 = S \cdot p$ diretta verso il basso.
- La forza di pressione sulla faccia inferiore del cilindro $F_2 = S \cdot (p + dp)$ diretta verso l'alto.
- La forza peso del cilindro $F_3 = mg = (\rho V)g = (\rho S dy)g = \rho S g dy$ diretta verso il basso.

Siccome la forza risultante deve essere nulla si ha che:
$-F_1 + F_2 - F_3 = 0$
e quindi:
$-S \cdot p + S \cdot (p + dp) - \rho S g dy = 0$, da cui segue che:

(3.1) $$\frac{dp}{dy} = \rho g$$

La (3.1) ci dice come varia la pressione con la profondità.
Per un aumento di profondità di dy si ha un aumento di pressione pari a $dp = \rho g dy \cdot \rho g$ è il peso specifico del fluido, e ne rappresenta il peso per unità di volume.
Infatti il peso di un fluido di massa m è dato da:
(3.2) $p = mg = \rho V g$
Se il volume del fluido è unitario ($V = 1$) la (3.2) diventa $p = \rho g$ che è proprio il peso specifico.
Dalla (3.1) si ha che se p_1 è la pressione alla profondità y_1 e p_2 è la pressione alla profondità y_2, la differenza di pressione è data da:
(3.3) $p_2 - p_1 = \rho g (y_2 - y_1)$
Dalla (3.3) segue che se conosciamo la pressione p_0 al livello superficiale di un liquido, la pressione ad una profondità $h = y_2 - y_1$ è data da:
(3.4) $p = p_0 + \rho g h$



(Fig. 6)

che è nota come **legge di Stevino**.

3.1 La pressione idrostatica

Possiamo riscrivere la (3.4) come $p = p_0 + p_h$ dove il termine $p_h = \rho g h$ rappresenta la *pressione idrostatica del fluido.*
Esso indica infatti la pressione alla profondità h dovuta soltanto al peso del liquido sovrastante.
Per chiarire ciò consideriamo nuovamente la figura 6.
Se indichiamo con m la massa di liquido contenuta al suo interno e quindi tra la superficie e la profondità h, il peso di tale massa è pari a:
$P = mg = (\rho V)g = (\rho S h)g$
La pressione esercitata da tale liquido è pari a:

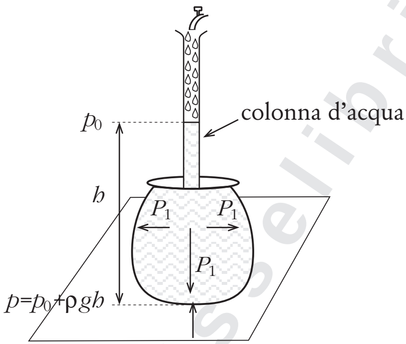
$$p_h = \frac{P}{S} = \rho g h$$

che è proprio la **pressione idrostatica** prima definita.

3.2 Conseguenza della legge di Stevino

Paradosso idrostatico

Consideriamo la figura 7 in cui dell'acqua viene fatta scendere attraverso una cannula in una botte.



(Fig. 7)

Per la legge di Stevino la pressione sul fondo della botte è pari a:

$$p = p_0 + p_h = p_0 + \rho gh$$

dove p_h è la pressione idrostatica e dipende *soltanto* dall'altezza della colonna d'acqua contenuta nella cannula.
Quindi anche se la cannula è molto stretta, la pressione nel vaso aumenterà linearmente con l'altezza dell'acqua presente nella cannula.
Per il principio di Pascal, questa pressione si trasmette in ogni altro punto e in **tutte le direzioni** con la stessa intensità.
Quindi, la pressione idrostatica si eserciterà sia sulla base che sulla superficie laterale della botte con la stessa intensità e, di conseguenza, anche la forza esercitata dall'acqua contro la botte, essendo il prodotto della pressione per la superficie, aumenterà proporzionalmente con l'altezza della colonna d'acqua nella canna.
La forza esercitata sulla base della botte viene controbilanciata dalla reazione vincolare del piano su cui la botte è appoggiata mentre, con-

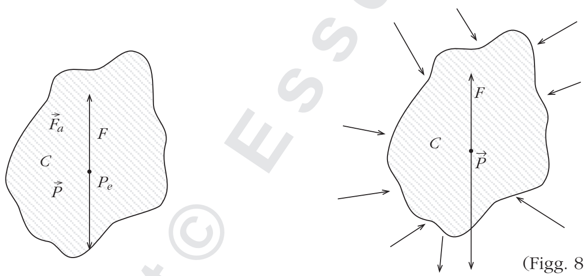
tinuando a versare l'acqua, ad un certo punto la superficie laterale della botte non sarà più in grado di contrastare la forza premente dell'acqua e si romperà.

4) Il Principio di Archimede

Enunciato

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume del liquido spostato.

Consideriamo una porzione C di un fluido in equilibrio in un recipiente (Fig. 8.a).



(Figg. 8.a e 8.b)

Le forze agenti su C sono:

— la forza peso $\vec{P}$;

— la risultante delle forze di pressione $\vec{F}_a$, detta **forza di Archimede**, esercitata dal restante liquido sulla superficie di C.

Siccome C è in equilibrio, la somma di queste due forze deve essere uguale a zero:

$$\vec{P} + \vec{F}_a = 0$$

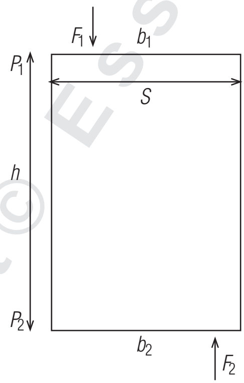
da cui segue che:

$$\vec{F}_a = -\vec{P}$$

Pertanto la forza di Archimede deve avere la stessa intensità ma verso opposto alla forza del peso ed è, quindi, rivolta verso l'alto, e di valore pari al peso di C e cioè al peso del volume del liquido in C.
Sostituiamo ora C con un corpo K avente le stesse dimensioni (e quindi lo stesso volume) di C. Anche in questo caso, le forze agenti su K sono la forza peso e la forza di Archimede, ma, mentre il peso di K dipende, ovviamente, da K stesso, la forza di Archimede, essendo esercitata dal liquido esterno, è uguale a quella che si esercitava su C.
Se sostituissimo K con un altro oggetto K' avente le stesse dimensioni, la forza di Archimede continuerebbe ad essere invariata.

Forze agenti su un corpo immerso in un fluido

Calcolare la risultante delle forze agenti su un corpo immerso in un fluido nel caso che il corpo abbia la forma di un parallelepipedo.



(Fig. 9)

Per la legge di Stevino, la pressione in un liquido è la stessa alla stessa altezza, quindi sulle facce laterali del parallelepipedo le forze di pressione sono uguali in modulo e si annullano reciprocamente a due a due.
Le due basi, invece, si trovano a profondità diverse e quindi le forze di pressione saranno differenti.
Se p è la pressione a livello della base superiore, per la legge di Stevino, alla base inferiore la pressione è $p + \rho gh$.

Se S è la sezione del solido, la forza agente sulla base superiore è $F_1 = p \cdot S$ ed è diretta verso il basso; la forza agente sulla base inferiore è $F_2 = pS + \rho ghS$. La forza risultante agente sul corpo è quindi data da: $F = F_2 - F_1 = pS + \rho ghS - pS - \rho ghS$. Ma $V = hS$ è il volume del parallelepipedo e $P_s = \rho g$ è il peso specifico del liquido. Quindi $F = P_s V$ ed è proprio il peso del liquido spostato come affermato nella legge di Archimede.
Spesso nei problemi si crea un po' di confusione su questa formula: la forza di Archimede è data dal prodotto tra il **volume V del corpo** immerso e il **peso specifico P_s del fluido** in cui il corpo è immerso.

Corpi che affondano e corpi che galleggiano

L'esperienza ci insegna che non tutti i corpi affondano. Vediamo perché un corpo **affonda** e perché un altro corpo **galleggia**.

Abbiamo visto che su un corpo immerso in un liquido agiscono la sua forza peso diretta verso il basso e la spinta di Archimede diretta verso l'alto quindi:

(i) Se il peso del corpo è maggiore della spinta di Archimede il corpo affonda.
(ii) Se il peso del corpo è uguale della spinta di Archimede il corpo è in equilibrio in ogni posizione.
(iii) Se il peso del corpo è minore della spinta di Archimede il corpo galleggia.

Indicando con P_s il peso specifico del corpo e con P_L il peso specifico del liquido, il **peso del corpo** è dato da $P = P_s V$ e la **spinta di Archimede** è data da $F = P_L V$.

Quindi dalle (i),(ii) e (iii) deriva che:

(i*) Se $P_s > P_L$ il corpo affonda.
(ii*) Se $P_s = P_L$ il corpo è in equilibrio in ogni posizione.
(iii*) Se $P_s < P_L$ il corpo galleggia.

Per l'equilibrio dei corpi ha anche grande importanza la forma che, se opportunamente sagomata, può spostare un liquido maggiore e ricevere così una maggiore spinta verso l'alto. In tali condizioni un corpo può galleggiare anche se il suo peso specifico è maggiore di quello del fluido che lo contiene.